8

Τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας βιβλίον Α΄

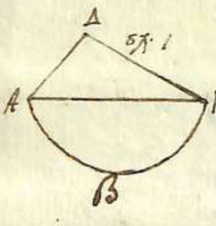
§ Ἡ ὁποιαδήποτε καταμέτρησις, ἢ κατὰ μίαν ἐκταθεῖσα διάστασιν, μῆκος, δηλ: πλάτος, βάθος, ἤτε ὕψος μηδεμιᾶς ἄλλης τῶν μαθηματικῶν ἐννοουμένης ἰδιότητος, ἢ κατὰ δύο ἐκτάσεις, ἢ τελευταῖον κατὰ τρεῖς, αἵτινες καὶ ἔκτασις ἁπλῶς ὀνομάζονται. Ὅθεν καὶ ἡ ἐπιστήμη, ἡ τὰς ἀρχὰς ἐν γένει τῶν διαφόρων τούτων διδάσκουσα καταμετρήσεων, περὶ τὰς ἰδιότητας τῶν διαστάσεων ἀφηρημένως, καὶ τῆς ἐκτάσεως γενικώτερον ἐνασχοληθήσεται. Καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ γεωμετρία ἐν γένει, ἥτις περὶ τὴν ἔκτασιν, ἤτε μεγέθη γενικῶς περιγραφομένη, τὰς ἰδιότητας αὐτῶν, καὶ τὰς πρὸς ἄλληλα διδάσκει ἀναφοράς.

§2: Ἡ γεωμετρία ἐκ τοῦ κατὰ μέρος μετρήσεων λαβοῦσα τὰς ἀρχὰς ἐς μεγάλην προήχθη αὔξησιν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ἐκείνων ἀνδρῶν. τούτων δὲ ὑπῆρξαν, ὁ περὶ τὸ 640 πρὸ τοῦ σωτηρίου ἔτει ἀκμάσας, Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, ὁ περὶ τὸ 590 τὴν Πυθαγορικὴν συστήσας σχολήν, Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, τούτου Πλάτων, ὁ περὶ τὸ 370 διδάσκων, καὶ Εὐκλείδης ὁ κατὰ τὴν Ἀλεξάνδρειαν περὶ τὸ 300 τὰ τῆς γεωμετρίας συγγράψας στοιχεῖα, τούτου Ἀρχιμήδης, ὁ περὶ τὸ 250 τὴν γεωμετρίαν ἐπὶ τοσοῦτον προαγαγών, τούτου Ἀπολλώνιος, ὁ περὶ τὸ 200 ἀκμάζων, τούτοις δὲ καὶ οἱ μεταγενέστεροι μιμηθέντες, μεγάλως τὰ τῆς γεωμετρίας ἐπλούτισαν. Καὶ οἱ σήμερον δὲ καθεκάστην ἐς τὰ πρόσω αὐτὰ προάγουσι τοῖς ποσοτικοῖς ὑπολογισμοῖς ὀργάνῳ χρώμενοι, καὶ τὰς ἰδιότητας, καὶ ἀναφορὰς ὁποιασδήποτε ἐξερευνῶντες διαστάσεως, καὶ ἐκτάσεως.

§3: Περὶ ὁποιανδήποτε διάστασιν, καὶ ἔκτασιν ἡ γεωμετρία ἐν γένει ἐνασχολουμένη, ἐς δύο κοινῶς διαιρεθῆναι δύναται, ἐς ὑψηλοτέραν δηλ: γεωμετρίαν, τὴν περὶ συνθετωτέρων, καὶ ὑψηλοτέρας θεωρίας δεομένων διαστάσεων καὶ ἐκτάσεων διδάσκουσαν, καὶ ἐς στοιχειώδη, τὴν περὶ τῶν ἁπλουστέρων μεγεθῶν πραγματευομένην, καὶ τὰς βάσεις τῆς ἑτέρας καταβάλλουσαν, ταύτην δὲ τῶν μαθηματικῶν πολλοὶ κυρίως γεωμετρίαν ὀνομάζουσιν, ἐκείνην δὲ καὶ τὰ αὐτῆς ἤδη διὰ μερικωτέρων ὀνομάτων προσαγορεύουσιν.

§4: Ἐπεὶ δὴ λοιπὸν καὶ ἡ στοιχειώδης γεωμετρία οὐχὶ περὶ πᾶσαν ἐνασχολεῖται διάστασιν καὶ ἔκτασιν, τινῶν δὲ μόνον τὰς ἰδιότητας καὶ ἀναφορὰς θεωρεῖ, ἀνάγκη ἐστὶν ἵνα περὶ τοῦ ἀντικειμένου τῆς γεωμετρίας διαλαβόντας, τὸ τῆς στοιχειώδους μερικώτερον προσδιορίσωμεν.

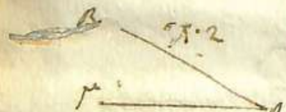
§5: Ὁποιαδήποτε διάστασις γραμμὴ ἐν γένει λέγεται, ταύτης δὲ τὰ πέρατα σημεῖα καλεῖται. Ὅθεν καὶ τὰ σημεῖα οὐδεμίαν ἔχουσι διάστασιν. §6: Καὶ εὐθεῖα μὲν γραμμὴ ἤτε εὐθεῖα μόνον λέγεται, ἡ δύο σημείων ἐλαχίστη ἀπόστασις, ἡ δὲ ἐξ εὐθειῶν συγκειμένη τεθλασμένη προσαγορεύεται γραμμή, ἡ δὲ μηδὲ εὐθεῖα οὖσα, μηδὲ ἐξ εὐθειῶν σύνθετος, καμπύλη ἐν γένει ὀνομάζεται. Οὕτω γὰρ δ᾽ ἔστω, ἡ μὲν ΑΓ εὐθεῖά ἐστιν (σχ: 1) ἡ ΑΔΓ, τεθλασμένη, καὶ ἡ ΑΒΓ καμπύλη.

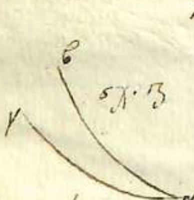


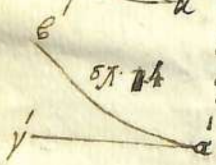
§7: Τὸ μῆκος καὶ πλάτος ἤτοι τὸ δύο διαστάσεις ἔχον, ἐπιφάνεια λέγεται, καὶ ἐπίπεδος μέν, ὅταν ἡ εὐθεῖα ἡ δύο αὐτῆς ὁποιαδήποτε σημεῖα συζευγνύουσα, ὅλη ἐπ᾽ αὐτῆς ἐφαρμόζῃ, ἡ δὲ μηδὲ ἐπίπεδος οὖσα, μηδὲ ἐξ ἐπιπέδων σύνθετος, κυρτὴ ὀνομάζεται.

§8: Τὸ δὲ τρεῖς ἔχον διαστάσεις, στερεὸν ἐν γένει καλεῖται. Καὶ τοῦτο μέν ἐστι τὸ τῆς γεωμετρίας, ἤτοι τῆς τῶν μεγεθῶν ἐπιστήμης τὸ ὑποκείμενον, τ.ἔ.: ὁποιαδήποτε γραμμή, ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια καὶ ὁποιονδήποτε στερεόν. Περὶ τούτων δὲ ἡ στοιχειώδης γεωμετρία μερικώτερον ἐνασχοληθήσεται, διὰ τῶν ἑξῆς προσδιορισθέν.

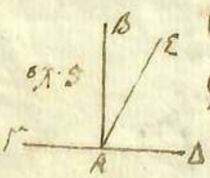
§9: Ὅταν δύο γραμμαὶ ἀλλήλαις πλαγίως συναντήσωσιν, ὡς αἱ ΑΒ, ΑΓ (σχ: 2) αβ, αγ (σχ: 3) α΄β΄, α΄γ΄, (σχ: 4) ἡ μὲν κατὰ κλίσιν ἀπόστασις αὐτῶν γωνία ὀνομάζεται, κορυφὴ δὲ αὐτῆς τὸ σημεῖον λέγεται τῆς συμπτώσεως, οἷον τὸ Α, α, α΄, πλευραὶ δὲ αὐτῆς καλοῦνται αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΑΓ, αβ, αγ, α΄β΄, α΄γ΄, καὶ εὐθύγραμμος μὲν ἡ γωνία καλεῖται, ἡ δι᾽ εὐθειῶν σχηματιζομένη ὡς ἡ ΒΑΓ, καμπυλόγραμμος, ἡ διὰ καμπυλῶν, ὡς ἡ α, καὶ μικτόγραμμος, ἡ δι᾽ εὐθείας καὶ καμπύλης, ὡς ἡ α΄. Σημειοῦται δὲ ὁποιαδήποτε γωνία, ἢ διὰ τοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς κειμένου στοιχείου, ἢ καὶ διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων, τοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ἐν τῷ μέσῳ τιθεμένου.







§10: Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι οὕτως ἀλλήλαις συναντήσωσιν, ὥστε τὰς προσκειμένας γωνίας ΒΑΓ, ΒΑΔ (σχ: 5) ἴσας ἀλλήλαις εἶναι,

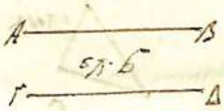


Ταῦ

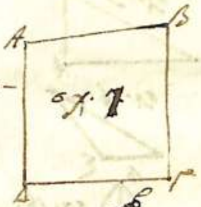
αἱ μὲν προσκείμεναι γωνίαι ὀρθαὶ ὀνομάζονται, ἡ δὲ ΑΒ κάθετος λέγεται.

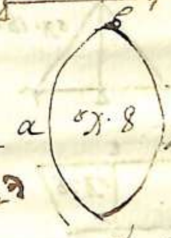
§11: Πᾶσα γωνία ἐλάσσων μὲν ὀρθῆς οὖσα, ὡς ἡ ΕΑΔ, ὀξεῖα ὀνομάζεται, μείζων δὲ ὀρθῆς ὑπάρχουσα ὡς ἡ ΕΑΓ, ἀμβλεῖα καλεῖται.

§12: Δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, (σχ. 6) ὅσον δήποτε ἐκβαλλόμεναι καὶ μηδέποτε συμπίπτουσαι παράλληλοι προσαγορεύονται.



§13: Ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια (σχ. 7) ἤτοι τὸ ἐπίπεδον τὸ πανταχόθεν ὑπὸ γραμμῶν περατούμενον· ἤτοι εὐθύγραμμον μὲν τὸ ὑπὸ εὐθειῶν, ὡς τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 7), καμπυλόγραμμον δὲ τὸ ὑπὸ καμπύλων, ἢ καμπύλης, ὡς τὸ αβγ (σχ. 8) καὶ μικτόγραμμον τὸ ἐξ ἀμφοτέρων, ὡς τὸ αβγ (σχ. 9) πᾶσαι αἱ τὰ σχήματα ἀποπερατοῦσαι, αἱ δὲ γραμμαὶ ὅροι τοῦ σχήματος λέγονται, ὁμοῦ ληφθεῖσαι περίμετρον. ὅθεν καὶ ἰσοπερίμετρα σχήματα καλοῦνται τὰ ἴσας τὰς περιμέτρους ἔχοντα.





§14: Δύο δὲ πολύγωνα ἀλλήλοις ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια λέγονται, τὰ ἑαυτῶν πλευρὰς καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα, αἱ δὲ ἴσαι πλευραὶ καὶ γωνίαι ὁμόλογοι καλοῦνται.

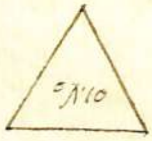
§15: Ὅμοια πολύγωνα ἐν γένει ὀνομάζονται, τὰ ἀλλήλοις μὲν ἰσογώνια, ἔχοντα δὲ καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

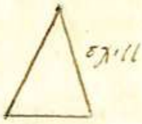
§16: Ἰσότιμα ἐπίπεδα σχήματα λέγονται τὰ ἔχοντα τὰς μὲν ἐπιφανείας ἴσας, τὰ δὲ σχήματα διάφορα, ἴσα δὲ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα. Ὅθεν δῆλον γίνεται, ὅτι πάντα τὰ ἴσα σχήματα καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστίν, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

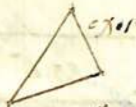
§17: Κανονικὰ πολύγωνα ἐν γένει καλοῦνται, τὰ ἔχοντα τὰς ἑαυτῶν γωνίας καὶ πλευρὰς ἴσας.

§18: [illegible]λων τῶν εὐθυγράμμων πολυγώνων ἁπλούστατον ἐστὶ τὸ ἐκ τριῶν πλευρῶν σχηματιζόμενον, καὶ τοῦτο μὲν τρίγωνον ἢ τρίπλευρον ὀνομάζεται, τὸ ἐκ τεσσάρων τετράπλευρον καλεῖται, τὸ ἐκ πέντε πεντάπλευρον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

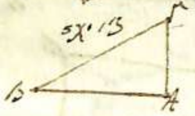
§19. Τῶν δὲ εὐθυγράμμων τριγώνων ἰσόπλευρον μὲν ἐστὶ τὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἔχον, (σχ: 10), ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας (σχ: 11), καὶ σκαληνὸν τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους (σχ: 12)

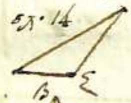


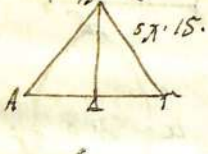




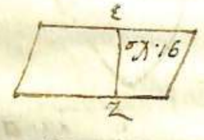
§20. Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ μίαν τινὰ γωνίαν ὀρθὴν ἔχον, οἷον τὴν Α (σχ: 13) ἡ δὲ ἀντικειμένη ταύτῃ πλευρὰ ὑποτείνουσα καλεῖται. Ἀμβλυγώνιον δὲ τρίγωνον προσαγορεύεται τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν, ὡς τὴν Ε (σχ: 14), καὶ ὀξυγώνιον τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας, ὡς τὰς Α, Β, Γ (σχ: 15)

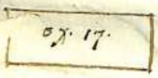


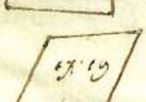




§21. Τῶν δὲ τετραπλεύρων παραλληλόγραμμον μὲν λέγεται, τὸ παραλλήλους ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς (σχ: 16), ὀρθογώνιον δὲ τὸ τὰς γωνίας ὀρθὰς ἔχον, (σχ: 17), καὶ τετράγωνον μὲν καλεῖται, οὗτινος καὶ αἱ πλευραί, καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι ὑπάρχουσι (σχ: 18), ῥόμβος δὲ ὀνομάζεται, οὗτινος αἱ πλευραὶ μόναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί (σχ: 19), καὶ τελευταῖον τραπέζιον λέγεται, τὸ δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους ἔχον (σχ: 20)

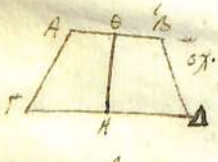




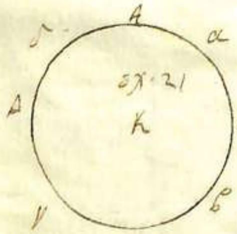


§22. Τῶν δὲ πολυπλεύρων, ἑξαπλεύρων καὶ τῶν μετὰ ταῦτα τῶν πολυπλεύρων ἰσογώνια μὲν ὀνομάζονται τὰ πάσας τὰς γωνίας ἴσας ἔχοντα, ἰσόπλευρα δὲ ~~πάσας~~ τὰ πάσας τὰς πλευράς.

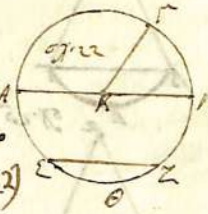
§23. Ὕψος παντὸς μὲν τριγώνου λέγεται, ἡ ἀπό τινος γωνίας αὐτῇ τῇ ἀντικειμένῃ πλευρᾷ καταγομένη κάθετος. ὡς ἡ ΒΔ, (σχ: 15), παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἡ ἀπό τινος πλευρᾶς τῇ παραλλήλῳ αὐτῇ καταγομένη, ὡς ΕΖ (σχ: 16). Καὶ παντὸς τραπεζίου ἡ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῇ παραλλήλῳ αὐτῇ ΓΔ καταγομένη ὡς ἡ ΘΗ (σχ: 20)



§24. Τὸ δὲ καμπυλόγραμμον ἐπίπεδον σχῆμα, οἷον τὸ Α, Β, Γ, Δ (σχ: 21) τὸ ὑπὸ καμπύλης περιμετρούμενον, ἐξ ἴσου πανταχόθεν ἀπό τινος μέσου ἀπεχούσης, κύκλος ὀνομάζεται. ἡ δὲ περιμετροῦσα αὐτὸν καμπύλη α, β, γ, δ περιφέρεια κύκλου λέγεται, τὸ δὲ μέσον σημεῖον Κ, ἀφ' οὗ ἐξ ἴσου πανταχόθεν ἡ περιφέρεια ἀπέχει κέντρον κύκλου καλεῖται.



§25. Πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι εὐθεῖαι, καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν ἀποληγοῦσαι, ὡς ἡ Α, Β (σχ: 22) διάμετροι τοῦ κύκλου καλοῦνται, αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν περαιούμεναι ὡς αἱ Κ—Α, ΚΒ, ΚΓ ἡμιδιάμετροι ὀνομάζονται. Ἐπειδὴ δὲ πᾶν σημεῖον τῆς κύκλου περιφερείας ἐξίσου ἀπὸ τοῦ κέντρου διαστέχει, δῆλον ὅτι πᾶσαι αἱ διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τῶν ἡμιδιαμέτρων διπλάσιαι, καὶ ὅτι αἱ ἡμιδιάμετροι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

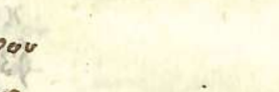


§26: Τόξον μὲν ὀνομάζεται μέρος τῆς περιφερείας, ὡς τὸ Ε—Θ—Ζ (σχ: 22). χορδὴ δὲ αὐτοῦ ἡ τε ὑποτείνουσα τὸ τόξον καλεῖται, ἢ ἡ τὰ πέρατα αὐτοῦ ζευγνύουσα εὐθεῖα, ὡς ἡ Ε—Ζ, αὕτη δὲ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένη ὀνομάζεται.

§27: Τμῆμα κύκλου καλεῖται τὸ ὑπὸ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ περιεχόμενον μέρος.

§28: Τομεὺς δὲ μέρος κύκλου ὑπὸ τόξου καὶ δύο ἡμιδιαμέτρων ἀποπερατούμενον, ὡς τὸ Β, Κ, Γ, (σχ: 22), ἡ δὲ γωνία Β, Κ, Γ, ἐπίκεντρος προσαγορεύεται.

§29: Ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένη γωνία λέγεται, ἧς τινος ἡ κορυφὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας κεῖται, αἱ δὲ πλευραὶ χορδαὶ τοῦ κύκλου εἰσίν ὡς ἡ Β (σχ: 23), πολύγωνον δὲ εὐθύγραμμον ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένον καλεῖται, ὅτινος αἱ γωνίαι πᾶσαι ἐπὶ τῆς περιφερείας κεῖνται, ὡς τὸ Α, Β, Γ· ἡ δὲ τοῦ κύκλου περιφέρεια περιγεγραμμένη, περὶ τὸ τοιοῦτον σχῆμα ὀνομάζεται.



§30: Τέμνουσα κύκλου λέγεται, ἡ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν κατὰ δύο συναντῶσα σημεῖα εὐθεῖα, ὡς ἡ Α—Β (σχ: 23), ἐφαπτομένη δέ, ἡ ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν τῇ περιφερείᾳ ἔχουσα, οἷον τὸ Σ, ὡς ἡ Ε—Ζ, ἐφαπτόμεναι δὲ περιφέρειαι, ὡσαύτως λέγονται αἱ καθ' ἓν μόνον σημεῖον κοινοῦσαι.

§31: Περίμετρος εὐθυγράμμου πολυγώνου περὶ κύκλον περιγεγραμμένη λέγεται, ὅταν αἱ πλευραὶ πᾶσαι τῆς περιφερείας ἐφάπτωνται, οἷον ἡ Α, Β, Γ, Δ, Ε (σχ: 24), ὁ δὲ κύκλος ΖΗΘΚΛ ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ πολυγώνῳ καλεῖται.

§32: Ὅμοια τόξα, ὅμοιοι τομεῖς, ὅμοια τμήματα, ἐν διαφόροις κύκλοις λέγονται, τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντικείμενα, τὸ ποσ φέρ' εἰπεῖν, ὑποτεθείσης τῆς γωνίας Α = α (σχ: 25) τὸ τόξον ΒΑΓ ὅμοιον λέγε

σχ. 25

τῷ βδγ, ὁ τομεὺς ΑΒΔΖ ὅμοιος τῷ αβδγ, καὶ τὸ τμῆμα ΒΖΔ ὅμοιον τῷ βγδ.

§33. Ὁ κύκλος κοινῶς μὲν εἰς 360 διαιρεῖται μοίρας, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αὐτοῦ περιφέρεια, τούτων δὲ ἑκάστη εἰς 60 ὑποδιαιρεῖται λεπτά, καὶ τούτων ἕκαστον εἰς 60 δεύτερα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Παρὰ δὲ τοῖς Γάλλοις εἰς 400 διαιρεῖται μέρη, βαθμοὺς καλούμενα, τούτων δὲ ἕκαστον εἰς 100 πρῶτα λεπτά, ὧν ἕκαστον πάλιν εἰς 100 δεύτερα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἑπομένως δὲ κατὰ μὲν τὴν κοινὴν διαίρεσιν τὸ μὲν ἡμικύκλιον 180 περιέχει μοίρας, τὸ δὲ τέταρτον τοῦ κύκλου 90, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς, κατὰ δὲ τὴν τῶν Γάλλων νεωτέραν διαίρεσιν τὸ μὲν ἡμικύκλιον 200 περιέχει βαθμούς, τὸ δὲ τέταρτον 100, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς.

§34. Ἐπεὶ δὲ καὶ πάντα τὰ τῆς περιφερείας μέρη ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχουσι, δῆλον ὅτι κοινὴ οὖσα ἡ διάμετρος, εἰς τὰ ὑπ' αὐτῆς διαχωριζόμενα τοῦ κύκλου τμήματα, πάντα τὰ τῆς περιφερείας μέρη θατέρου τμήματος ἐπὶ τῶν μερῶν τῆς περιφερείας τοῦ ἑτέρου ἐφαρμοσθήσονται· καὶ ἑπομένως ἀμφότερα τὰ τμήματα ἴσα ἔσονται. (16) Ἤτε ἡ διάμετρος τέμνει δίχα καὶ τὸν κύκλον, καὶ τὴν περιφέρειαν διαιρεῖ ἴσα τμήματα, ὥστε ἑκάτερον τῶν τοιούτων τμημάτων ἡμικύκλιον ὄν 180 μοίρας κατὰ τὴν κοινὴν περιέχει διαίρεσιν, 200 δὲ βαθμοὺς κατὰ τὴν Γάλλων.

§35. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι τομέα κύκλου ὡσαύτως διαιρούμενον διαχωρίζουσι, δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαν ἐπίκεντρον γωνίαν εἰς τοσαῦτα μέρη, ἤτε γωνίδια διῃρημένην ὑποτίθεσθαι δυνατόν, εἰς ὅσα καὶ ὁ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς διοριζόμενος τομεὺς τομίδια, ἤτε εἰς ὅσα τὸ τόξον αὐτοῦ τοξίδια, καὶ ἐπειδὴ πᾶσα γωνία ὡς ἐπίκεντρος ἐκλαμβάνεσθαι δύναται, δῆλον, ὅτι καὶ πᾶσαν γωνίαν εἰς τοσαῦτα τμήματα διῃρημένην ἐκλαβεῖν δυνατόν, εἰς ὅσα καὶ ὁ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς διοριζόμενος τομεύς, ἤτε εἰς ὅσα τὸ ὑπ' αὐτοῦ διατεμνόμενον τῆς περιφερείας τόξον.

§36. Ὅθεν ἐπειδὴ καὶ ἐπὶ τῆς διαμέτρου κατὰ τὸ κέντρον δύο μόναι ἐπίκεντροι ὀρθαὶ συνίστανται (10) καὶ ἑπομένως περὶ τὸ κέντρον, καὶ περὶ πᾶν σημεῖον ἁπλῶς τέσσαρες μόναι ὀρθαί, δῆλον ὅτι καὶ ἑκάστην ὀρθὴν εἰς τοσαῦτα μέρη διελεῖν δυνατόν, εἰς ὅσα καὶ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, ἤτε τοῦ τομέως, ὅστις τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου συνίστησι, καὶ ἑπομένως εἰς 90 μὲν μοίρας κατὰ τὴν κοινὴν διαίρεσιν, εἰς 100 δὲ βαθμοὺς κατὰ τὴν τῶν Γάλλων.

§37. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν, καὶ ἑπομένως τὸ μέγεθος τοῦ τομέως, καὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἐξαρτᾶν εἰς τὰν κλίσιν τῶν πλευρῶν, ἤτε εἰς τὴν γωνίαν φέρει μεταβολήν, δηλονότι καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι αἱ αὐταὶ διαπαντὸς οὖσαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

§38. Πλήρωμα τομέως λέγεται, ὁ ὃς πληροῖ τὸ τέταρτον μέρος τοῦ κύκλου προστιθέμενος αὐτῷ τομεύς, πλήρωμα δὲ τόξου λέγεται τὸ ὃ πληροῖ τὸ τέταρτον μέρος τῆς περιφερείας λαμβανόμενον τόξον, καὶ πλήρωμα γωνίας ἡ μετ' αὐτῆς μίαν ὀρθὴν πληροῦσα γωνίαν.

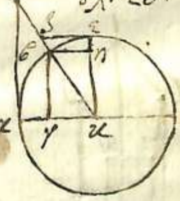
§39. Συμπλήρωμα δὲ τῶν αὐτῶν καλεῖται, τοῦ μὲν τομέως δηλ. ὁ ὃς συμπληροῖ ἡμικύκλιον προστιθέμενος αὐτῷ τομεύς, τοῦ δὲ τόξου τὸ μετ' αὐτοῦ ἡμιπεριφέρειαν συμπληροῦν, τῆς δὲ γωνίας ἡ μετ' αὐτῆς δύο συμπληροῦσα γωνίας ὀρθάς.

§40. Παραπληρώματα δὲ ὀνομάζονται τῶν μὲν τομέων οἱ ὃς παραπληροῦσι τῶν τριῶν τεταρτημορίων τοῦ κύκλου λαμβανόμενοι τομῆς, τῶν δὲ τόξων τὰ τόξα τὰ παραπληροῦντα τὰ τρία τέταρτα τῆς περιφερείας, τῶν δὲ γωνιῶν αἱ ὃς παραπληροῦσι τριῶν ὀρθῶν προστιθέμεναι αὐταῖς γωνίας.

§41. Συμπαραπλήρωμα τελευταῖον προσαγορεύεται, ὡς μὲν πρὸς τὴν τομῆς, ὁ τομεὺς ὁ τὸν κύκλον σὺν τῷ δοθέντι τομεῖ συμπαραπληρῶν, ὡς δὲ πρὸς τὰ τόξα τὸ τόξον τὸ μετὰ τοῦ δοθέντος τὴν περιφέρειαν συμπαραπληροῦν, καὶ τελευταῖον ὡς πρὸς τὰς γωνίας ἡ τέσσαρας ὀρθὰς αὐταῖς συμπαραπληροῦσα.

§42. Πάσης ἐπικέντρου γωνίας καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς διατεμνομένου τόξου, καὶ ἑπομένως πάσης γωνίας ἡμίτονον μὲν λέγεται, ἡ ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς περιφερείας καὶ θατέρας πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἑτέραν καταγομένη κάθετος· συνημίτονον δέ, τὸ ἀπὸ ταύτης, ἕως τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας λαμβανόμενον μέρος τῆς πλευρᾶς, καὶ παρημίτονον τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ἕως τῆς περιφερείας διατεμνόμενον μέρος αὐτῆς, ἐφαπτομένη δὲ τοῦ αὐτοῦ τόξου καὶ τῆς γωνίας καλεῖται, ἡ ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς περιφερείας καὶ τῆς πλευρᾶς ἀγομένη κάθετος, καὶ ὑπὸ τῆς θατέρας πλευρᾶς ἐκβαλλομένης ἀποτεμνομένη, τέμνουσα δὲ τούτων ὀνομάζεται, τὸ μέρος τῆς ἐκβαλλομένης, τὸ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ τοῦ κέντρου διαχωριζόμενον, καὶ τελευταῖον συνεφαπτομένη, συντέμνουσα, συμπαρημίτονον τῶν αὐτῶν προσαγορεύεται ἡ ἐφαπτομένη, ἡ τέμνουσα, καὶ τὸ παρημίτονον τῶν πληρωμάτων αὐτῶν. (38) οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, ἡ μὲν βγ (σχ: 26) κάθετος ἡμίτονον τοῦ τόξου αβ, καὶ τῆς γωνίας ακβ ἔσεται, ἡ δὲ γκ συνημίτονον· καὶ ἡ αγ παρημίτονον τῶν αὐτῶν, ἡ αδ ἐφαπτομένη, καὶ δκ τέμνουσα· καὶ τελευταῖον ἡ εζ συνεφαπτομένη, ἡ κζ συντέμνουσα, καὶ ἡ εη συμπαρημίτονον τῶν αὐτῶν ἔσεται. Αὗται δὲ καὶ αἱ ἄλλαι τριγωνομετρικαὶ καλοῦνται γραμμαί, καθότι ὡς τὸ ὑποκείμενον αὐταῖς μέρος τῆς καλουμένης τριγωνομετρίας ὑπάρχουσι.

σχ. 26

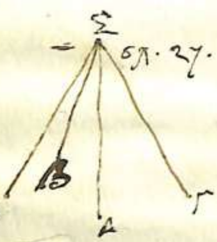


§43. Κάθετος πρὸς ἐπίπεδον ἡ εὐθεῖα λέγεται, ὅταν κάθετος ᾖ ἐπὶ πάσας τὰς διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς διερχομένας εὐθείας, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένας. Τότε δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετον τῆς εὐθείας λέγε[ται].

§44. Εὐθεῖα παράλληλος ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ὅταν ἀμφότερα ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενα μηδέποτε συναντῶσιν ἀλλήλοις, τότε δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ εὐθείᾳ λέγεται.

§45. Τὰ ἀσύμπτωτα τῶν ἐπιπέδων παράλληλά ἐστιν ἀλλήλοις.

§46. Λαμβάνοντος, ὡς ἀποδεδειγμένου, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων εὐθεῖα ἐστί, κλίσις αὐτῶν λέγεται ἡ γωνία ἡ ὑπὸ δύο ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἀγομένων καθέτων, ἐπί τινος τῆς τομῆς σημείου σχηματιζομένη, ταύτης δὲ τῆς γωνίας ὀρθῆς οὔσης, τὰ ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα λέγονται.

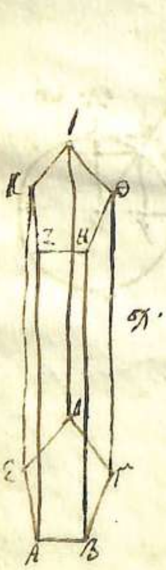

σχ. 27.

§47. Στερεὰ γωνία ὀνομάζεται, ἡ ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων σχηματιζομένη, οἷον, φέρ' εἰπεῖν, ἡ Σ (σχ. 27) στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΑΣΒ, ΑΣΔ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, σχηματίζεται. Ἴσθι δὲ ἀναγκαῖαι τοὐλάχιστον τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι πρὸς σχηματισμὸν μιᾶς στερεᾶς.

§48. Πολύεδρον καλεῖται, τὸ ὑπὸ ἐπιπέδων εὐθυγράμμων ἐπιφανειῶν ἀπεραιούμενον στερεόν, καὶ τετράεδρον μὲν ὀνομάζεται τὸ ὑπὸ τεσσάρων, ἑξάεδρον τὸ ὑπὸ ἕξ, ὀκτάεδρον τὸ ὑπὸ ὀκτώ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τούτων δὲ ἁπάντων ἁπλούστερον ἐστι τὸ τετράεδρον.

§49. Κανονικὸν πολύεδρον προσαγορεύεται, ὅ τινα αἱ μὲν ἕδραι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, αἱ δὲ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὑπάρχουσι.

§50. Διαγώνιος δὲ παντὸς πολυέδρου καλεῖται, ἡ ἀπό τινος αὐτοῦ στερεᾶς γωνίας εἰς ἑτέραν ἀγομένη εὐθεῖα.


σχ. 28

§51. Πρίσμα λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὑπὸ διαφόρων ἐπιπέδων ἀπεραιούμενον, οἷον τὸ ΑΔΖΘ (σχ. 28), ὧν δύο μὲν τὰ ἀπεναντίον, ἅπερ καὶ βάσεις τοῦ πρίσματος ὀνομάζονται, οἷον τὰ ΑΔ, ΖΘ ἴσα τε καὶ παράλληλά εἰσι, τὰ δὲ λοιπὰ οἷον τὰ ΑΗ, ΒΘ κτλ. παραλληλόγραμμα.

§52. Ὕψος παντὸς πρίσματος καλεῖται ἡ ταῖς βάσεσιν αὐτοῦ κοινὴ κάθετος.

§53. Ὀρθὸν τὸ πρίσμα λέγεται, ὅταν αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΒΗ κτλ. κάθετοι ταῖς βάσεσιν αὐτοῦ ὑπάρχωσιν, ἄλλως δὲ πλάγιον ὀνομάζεται.

§54: Τὸ πρίσμα τριγωνικόν, τετραγωνικὸν κτλ. προσαγορεύεται, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ τρίγωνος, τετράπλευρος ὑπάρχῃ.

§55: Τὸ πρίσμα παραλληλεπίπεδον ἁπλῶς ὀνομάζεται, ὅταν καὶ τὰς βάσεις παραλληλόγραμμα ἔχῃ, ὅταν δὲ καὶ τὰς παραλληλογράμμους βάσεις, καὶ τὰ λοιπὰ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἔχῃ, πρὸς δὲ καὶ ἀλλήλοις κάθετα ἔτι ὅταν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἀλλήλοις καθέτων συγκλείηται, τότε κύβος προσαγορεύεται.

§56: Πυραμὶς ἐστὶ στερεὸν διὰ τριγωνικῶν ἐπιπέδων, τῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, κτλ. (σχ: 29) καθ' ἓν σημεῖον τὸ Σ συγκορυφούμενον, καὶ διά τινος πολυπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔ κτλ. ἀποπερατούμενον, καὶ τὸ μὲν πολύγωνον ΒΔ βάσις τῆς πυραμίδος ὀνομάζεται, τὸ δὲ σημεῖον Σ κορυφή, ὕψος δὲ αὐτῆς καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ τῇ βάσει καταγομένη κάθετος. Λέγεται δὲ ἡ πυραμὶς, τριγωνική, τετραγωνική, κτλ. ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς τρίγωνος, τετράπλευρος ὑπάρχῃ κτλ.

§57: Κανονικὴ ὀνομάζεται πυραμὶς, ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς κανονικὸν ὑπάρχῃ πολύγωνον, καὶ ὅταν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς καταγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ μεσαίτατον τῆς βάσεως πίπτῃ σημεῖον· ἡ δὲ κάθετος αὕτη καὶ ἄξων τῆς πυραμίδος λέγεται.

§58: Ὅμοιαι πυραμίδες, ὅμοια πρίσματα, καὶ ἐν γένει ὅμοια πολύεδρα λέγονται τὰ ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων ὡσαύτως κειμένων, καὶ ὡσαύτως κεκλιμένων περιεχόμενα, ὁ λόγος δὲ ἐστὶ περὶ τοῦ πολυέδρου, τῶν κατὰ δύο τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν σημείων ὁποσδήποτε δι' αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα τεμνομένων, ἤτε περὶ τοῦ πολυέδρου λαμβανομένων τοῦ κυρτοῦ.

§59: Σφαῖρα ὀνομάζεται τὸ στερεὸν τὸ ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας ἀποπερατούμενον, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἐξ ἴσου ἀπέχουσιν ἀπό τινος μεσαιτάτου σημείου, ὅπερ κέντρον τῆς σφαίρας καλεῖται.

§60: Διάμετρος, ἢ καὶ ἄξων τῆς σφαίρας λέγεται, ἡ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπὶ τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἀποπερατουμένη· ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ μέχρι αὐτῆς ἐπιφάνειαν τελευτῶσα. Ὅθεν, δῆλον γίνεται, ὅτι αἱ διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ἡμιδιάμετροι ὑποδιπλάσιαι τῶν διαμέτρων ὑπάρχουσαι.

§61: Ὑποτεθέντος ὅτι ἡ διά τινος ἐπιπέδου τῆς σφαίρας τομὴ κύκλος ἐστί, μέγιστος κύκλος ἡ τοιαύτη ὀνομάζεται τομή, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου διέρχηται.

§62: Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας λέγεται, ὅταν ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν τῇ σφαιρικῇ ἔχῃ ἐπιφανείᾳ.

§63: Πόλος κύκλου σφαίρας λέγεται τὸ σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὃ ἐξ ἴσου ἀπὸ πάντων τῶν τῆς περιφερείας αὐτοῦ σημείων ἀπέχει.

§64: Σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων ἀποπερατούμενον. Λέγεται δὲ ὀρθογώνιον, ὀξυγώνιον, ἰσοσκελὲς δὲ ὡς καὶ ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων ὀρθογωνίων τριγώνων

§65: Σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται, τὸ ὑπὸ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων περιεχόμενον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας χωρίον.

§66: Σφαιρικὸς ἄτρακτος καλεῖται, τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ ὑπὸ δύο ἡμιπεριφερειῶν ταυτοδιαμέτρων, τῶν μεγίστων κύκλων ἀποπεραττόμενον.

§67: Σφαιρικὸς σφὴν καλεῖται, τὸ σφαιρικὸν στερεὸν, τὸ ὑπὸ ταυτοδιαμέτρων τῶν μεγίστων ἡμικυκλίων ἀποτεμνόμενον.

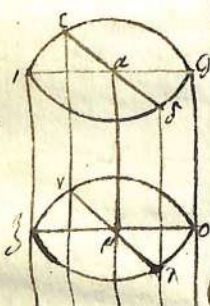
§68: Σφαιρικὴ πυραμὶς προσαγορεύεται ἡ πυραμίς, ἧς τινος κορυφὴ μὲν ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, βάσις δὲ σφαιρικὸν πολύγωνον.

§69: Ζώνη ὀνομάζεται τὸ χωρίον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων διατεμνόμενον.

§70 Τμῆμα σφαιρικὸν λέγεται, τὸ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων διατεμνόμενον τῆς σφαίρας μέρος, ἐὰν δὲ θάτερον τούτων τῆς σφαίρας ἐφάπτηται, τότε τὸ σφαιρικὸν τμῆμα μίαν μόνην ἔχει βάσιν.

§71 Ὑποτεθέντος ὅτι ἡ σφαῖρα περιγράφεται ἡμικυκλίου τινὸς περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ περιστρεφομένου, τὸ ὑπὸ τοῦ τομέως τοῦ κύκλου περιγραφόμενον στερεόν, τομεὺς τῆς σφαίρας ὀνομασθήσεται.

σχ: 30



§72: Κύλινδρος λέγεται τὸ διὰ τῆς περὶ θατέραν πλευρὰν αβ (σχ:30) περιστροφῆς ὀρθογωνίου τινὸς τοῦ βδ παραγόμενον στερεόν, οἷον τὸ κγηθδει, ὡς ἡ μὲν ἀκίνητος πλευρὰ αβ, ἄξων τοῦ κυλίνδρου ὀνομάζεται, αἱ δὲ περὶ τὰ σημεῖα, α, β, περιστρεφόμεναι πλευραὶ αδ, βγ, κύκλους τοὺς κγηθ, ιδθα περιγράφουσιν, οἵτινες βάσεις τοῦ κυλίνδρου καλοῦνται, ἡ δὲ δγ, τὴν κυρτὴν τοῦ κυλίνδρου περιγράφει ἐπιφάνειαν.

§73: Ἐπειδὴ καὶ ἡ λμ κάθετος τῷ ἄξονι αβ οὖσα, καὶ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν αδ, βγ ὑπάρχουσα, τὸν κύκλον λξνο περιστραφεῖσα, περιγράφει, δῆλον ὅτι πᾶσα τοῦ κυλίνδρου τομὴ κάθετος τῷ ἄξονι γενομένη, κύκλος ἴσος ἑκατέρᾳ τῶν βάσεων ἔσεται.

§74: Πᾶσα τομὴ μγ, κθ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου γενομένη, ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ περιστρεφομένου ἔσεται.

§75: Κῶνος ὀνομάζεται τὸ διὰ τῆς περὶ θατέραν πλευρὰν αΣ (σχ:31) τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου αδΣ

περ.

περιστροφῆς, ἀποτελέσμενον στερεόν, οἷον τὸ δβαγΣ, ἡ μὲν ἀκί-
νητος πλευρὰ αΣ, ἄξων τοῦ κώνου ὀνομάζεται, ἡ δὲ Σδ τὴν
κυρτὴν λεγομένην τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ἡ δὲ αδ κύ-
κλον τὸν δβεγ περιγράφει, βάσιν τοῦ κώνου καλούμενον, [illegible]
τὸ Σ σημεῖον κορυφὴ ὀνομάζεται.

§76: Ἐπειδὴ καὶ ἡ κη κάθετος τῷ ἄξονι αΣ, τὸν κύκλον τὸν περιστρεφομένη περιγράφει, δῆλον ὅτι πᾶσα τοῦ κώνου τομὴ κάθετος τῷ ἄξονι γενομένη, κύκλος ἔσται, πᾶσα δὲ τομὴ διὰ τοῦ ἄξονος ἀγομένη, τρίγωνον ἰσοσκελὲς διπλάσιον τοῦ περιστρεφομένου στραφήσεται.

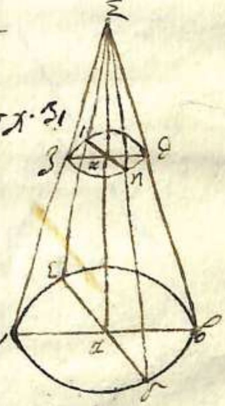
§77: Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος οὕτως τμηθῇ, ὥστε τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου παράλληλον εἶναι θατέρᾳ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἡ τοιαύτη τοῦ κώνου τομὴ παραβολὴ ὀνομάζεται. Ἐὰν δὲ ἡ ῥηθεῖσα κοινὴ τομή, ἐκβαλλομένη ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς τῇ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐπεκβαλλομένῃ συμπίπτῃ, τότε ἡ τοιαύτη τοῦ κώνου τομὴ ὑπερβολὴ καλεῖται. Ἐὰν δὲ ἐντὸς ἔλλειψις λέγεται, καὶ περὶ τὰς ἰδιότητας τῶν τοιούτων τομῶν αἱ τοῦ κώνου λεγόμεναι πραγματεύονται τομαί.

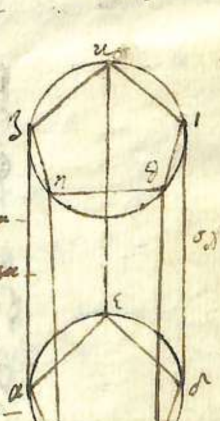
§78: Ἀπὸ τοῦ κώνου βδγεΣ (σχ:31) τοῦ ηζιθΣ ἀποτμηθέντος, τὸ λειπόμενον βδγεηζιθ τμῆμα κώνου ὀνομάζεται, τοῦτο δὲ αὐτὸς ἐκ τῆς περὶ τὴν πλευρὰν αι περιστροφῆς τοῦ τραπεζίου αζ παραγομένου εὐνοῆσαι δυνατόν.

§79: Δύο κύλινδροι, δύο κῶνοι ὅμοιοι λέγονται, ὅταν οἱ ἄξονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους ἔχωσιν, ὡς καὶ αἱ διάμετροι τῶν ἰδίων βάσεων.

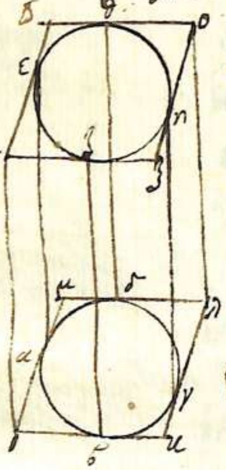
§80: Ἐὰν ἐν τῇ βάσει αβγδε (σχ:32) τοῦ κυλίνδρου πολύγωνον τὸ αβγδε ἐγγραφῇ, ἐπ' αὐτοῦ πρίσμα ὀρθὸν τῷ κυλίνδρῳ ἰσοϋψὲς κατασκευασθῇ, οἷον τὸ αβδζηι, τὸ μὲν πρίσμα ἐγγεγραμμένον λέγεται ἐν τῷ κυλίνδρῳ, τοῦ δὲ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια περιγεγραμμένη περὶ τὸ πρίσμα ὀνομάζεται.

§81 Ὡσαύτως ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ικλμ (σχ:33) περὶ τὴν βάσιν αβγδ τοῦ κυλίνδρου περιγραφῇ, ἐπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ πολυ-

σχ:31


σχ:32


σχ. 33.



γωνίου πρίσματος ὀρθοῦ τὸ ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ ἰσοϋψὲς κατασκευασθῇ, ὁ μὲν κύλινδρος ἐγγεγραμμένος τῷ πρίσματι λέγεται, τοῦτο δὲ ἡ κυρτοειδὴς ἐπιφάνεια περὶ τοῦ κύλινδρον περιγεγραμμένη προσαγορεύεται.

682. Ὀνομάζονται πρὸς τέλος οἱ γεωμέτραι ἀξίωμα μὲν τὸ ἐξ ἑαυτοῦ δῆλον ὑπάρχον, θεώρημα δὲ τὸ δι' ἀποδείξεως δηλούμενον, πρόβλημα τὸ ζητούμενον πραττόμενον, καὶ λῆμμα τὸ πρὸς δεῖξιν θεωρήματός τινος, ἢ καὶ ζήτησιν προβλήματος λαμβανόμενον, καὶ ἀποδεικνύμενον, πάντα δὲ ταῦτα ἐν γένει προτάσεις προσαγορεύονται.

683. Καλοῦσιν ἔτι συνεπόμενον μὲν τὸ ἐκ μιᾶς ἢ καὶ πολλῶν προτάσεων συναγόμενον. σχόλιον δὲ τὴν παρατήρησιν, ἥτις γράφεται, δι' ἧς σημειοῦνταί τινα τῶν εἰς τὰς προηγουμένας προτάσεις ἀναφερομένων. πόρισμα τὸ ἐξ αὐτῶν προσδιοριζόμενον, καὶ αἴτημα τὸ ἐξ ἑαυτοῦ διδόμενον.

684. Ἐπεὶ τῶν μέχρι τοῦδε λοιπὸν ὁρισθέντων ἡ στοιχειώδης γεωμετρία θεωρήσῃ ἐν γένει πάντα τὰ ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν, ἢ καὶ τῆς κύκλου περιφερείας σχηματιζόμενα, πάντα δὲ τὰ κυρτοειδῆ στερεὰ τὰ δι' αὐτῶν ἀποτελούμενα, ὅθεν ἵνα ἐκ τῶν ἁπλουστέρων εἰς τὰ μᾶλλον προβαίνωμεν σύνθετα, ἀναγκαῖόν ἐστιν, ὅπως ἀπὸ τοῦ μὲν περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν εὐθειῶν, τῆς τε κύκλου περιφερείας, καὶ τῶν δι' αὐτῶν σχηματιζομένων ἐπιπέδων σχημάτων διαλάβωμεν. εἶτα δὲ καὶ περὶ τῶν δι' αὐτῶν ἀποτελουμένων στερεῶν πραγματευθῶμεν, ἀξιώματά τινα ἐπὶ πάντων τῶν μεγεθῶν λεγόμενα προτάξαντες.

Βιβλίον Β.

Περὶ ἰδιοτήτων τῶν εὐθειῶν, καὶ τῶν δι' αὐτῶν σχηματιζομένων ἐπιπέδων σχημάτων.

Ἀξιώματα.

685: Πάντα τὰ μέρη ἴσα τῷ ὅλῳ ἐστί.

686. Τὸ ὅλον μεῖζον τοῦ ἰδίου μέρους ἐστί.

687: Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

688. Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

689. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ ἐγκαταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

690: Ἐὰν ἴσοις ἄνισα προστεθῇ, ἢ ἀπὸ ἴσων ἄνισα ἀφαιρεθῇ, τὰ ἐγκαταλειπόμενα ἐστὶν ἄνισα.

691 Τὰ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

692: Τὰ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις ὑποπολλαπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

693: Δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

694 Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Θεωρήματα.

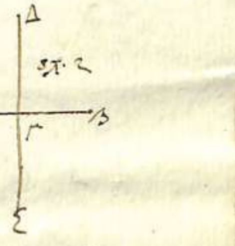
§95: Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον μίαν μόνην εὐθεῖαν ἀγαγεῖν δυνατόν. Ἐπειδὴ γάρ, ἡ εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐπὶ δύο σημείων ἀπόστασις (6), καὶ ἐπειδὴ ἡ τοιαύτη ἀπόστασις μία μόνη ἐστί, δῆλον, ὅτι ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐπὶ ἕτερον σημεῖον μία μόνη ἀχθήσεται εὐθεῖα· εἰ δὲ μή, δύο ἔσονται αἱ τῶν σημείων ἐλάχισται ἀποστάσεις, καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. (93)


σχ: 1

§96: Εὐθεῖα ἡ ΓΔ (σχ:1) ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΒ καθεῖσα, τὰς προσεχομένας γωνίας ΑΓΔ, ΒΓΔ ἢ ὀρθὰς ποιήσει, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· καθότι, ἐὰν κάθετος ἡ ΓΔ, τῇ ΑΒ καθῇ, αἱ προσεχόμεναι γωνίαι ὀρθαὶ ἔσονται, (10) ἐὰν δὲ πλαγίως αὐτῇ συναντήσῃ, τότε πάλιν αἱ προσεχόμεναι γωνίαι τὸ αὐτὸ τῶν δύο ὀρθῶν καταλήψονται διάστημα, καὶ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἔσονται.

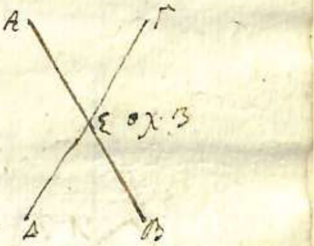
§97 Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι ἑτέρας τῶν προσεχομένων γωνιῶν ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἡ ἑτέρα ὀρθὴ ἔσεται.

§98: Ἴσον ὅτι δύο εὐθεῖαι ἀλλήλας τέμνουσαι, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας γωνίας ποιοῦσι περὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνονται.


σχ: 2

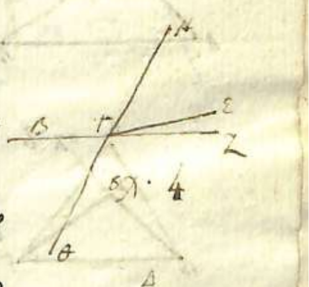
§99: Εὐθείας τῆς ΔΕ (σχ:2) καθέτου τῇ ΑΒ οὔσης, καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἔσται τῇ ΔΕ, καθότι τῆς ΑΓΔ γωνίας ὀρθῆς οὔσης ἐξ ὑποθέσεως, πρὸς δὲ καὶ τῆς ΔΓΒ, ὀρθὴ ἔσεται καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ ἡ ΕΓΑ (97)

§100 Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι μιᾶς τῶν περὶ τι σημεῖον σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν ὀρθῆς οὔσης, καὶ αἱ λοιπαὶ τρεῖς ὀρθαὶ ἔσονται.

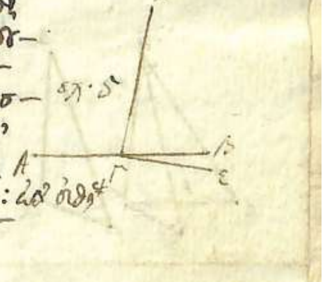

σχ: 3

§101 Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, (σχ:3) ἀλλήλας τέμνουσαι, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. Ἐπειδὴ ΑΕΓ+ΓΕΒ=ΓΕΒ+ΒΕΔ (96) ἔπεται καὶ ΑΕΓ=ΒΕΔ (89). Ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ ΑΕΔ=ΓΕΒ.

§102 Δύο εὐθεῖαι κοινὰ δύο σημεῖα ἔχουσαι, τὰ Α, Β (σχ: 4) ἀλλήλαις ἐφαρμόζουσι, καὶ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν. Ὅτι μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β, ἀλλήλαις ἐφαρμόζουσι, δῆλον ἐστί (95) ὅτι δὲ καὶ μετὰ τὸ Β ὁποσοῦν ἐκβαλλόμεναι αἱ εὐθεῖαι, ἀλλήλαις ἐφαρμόζουσι, ἀποδείκνυται. Καθότι, ὑποτεθέντος, ὅτι κατὰ τὸ Γ σημεῖον τὸ διχάζεσθαι ἄρχονται, ἀχθήσεται ὁποσοῦν δι' αὐτοῦ τῆς ΗΓΘ εὐθείας, ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι ΗΓΕ, ΗΓΖ κατὰ κορυφὴν τῇ ΑΓΘ ὑπάρχουσαι ἴσαι αὐτῇ εἰσιν (101), δῆλον ὅτι, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. (87) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον (86)

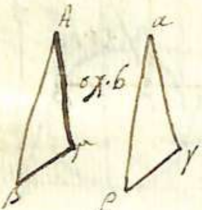

σχ: 4

§103: Ἐὰν δύο προσεχόμεναι γωνίαι αἱ ΑΓΔ, ΔΓΒ (σχ:5) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ὑπάρχωσιν, ἐπ' εὐθείας κείσονται αἱ ΑΓ, ΓΒ πλευραί, καὶ μίαν ἀποτελέσουσιν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἐπειδὴ καὶ εὐθεῖα ἡ ΓΔ ἐπ' εὐθείας καθεῖσα, τὰς προσεχομένας γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ (96) καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦθα αἱ προσεχόμεναι γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ὑποτίθενται, ἔπεται, ὅτι ἡ ΑΓ ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ κεῖται. Δεῖ: ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐπ' εὐθείας κείμεναι τὴν ΑΒ ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν· εἰ δὲ μή, ὑποτεθείσης τῆς ΓΕ: ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ, ἕξομεν ΑΓΔ+ΔΓΒ=ΑΓΔ+ΔΓΕ (96, 87). καὶ ἑπομένως ΔΓΒ=ΔΓΕ,


σχ: 5

(89) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

§104. Ἐὰν τριγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒ ἴση δοθῇ τῇ πλευρᾷ αβ ἄλλου τριγώνου (σχ. 6) καὶ ἡ ΒΓ τῇ βγ, προσέτι αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι Β, β ἴσαι, τότε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἴσον τῷ αβγ ἔσεται, καθότι ἡ μὲν ΑΒ, ἐπὶ τῆς αβ τεθεῖσα ἐφαρμόσῃ, καὶ τὰ σημεῖα Α, Β ἐπὶ τῶν α, β κείσονται. ἡ δὲ γωνία Β ἐπὶ τῆς β ἐφαρμόσῃ, καὶ ἡ ΒΓ πλευρὰ ἐπὶ τῆς βγ, καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ γ κείσεται (94). ὅθεν καὶ ἡ ΑΓ ἐπὶ τῆς αγ ἐφαρμοσθήσεται (95), καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπὶ τὸ αβγ, καὶ ἑπομένως ἴσον αὐτῷ ἔσεται.

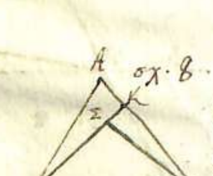


§105. Ἔτι δῆλον ἔσεται, ὅτι δύο τριγώνων δύο πλευρὰς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἐχόντων, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας καὶ τὰ λοιπὰ τρία ἴσα ἔσονται.

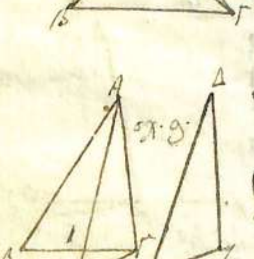
§106. Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία Β ἴση δοθῇ τῇ β ἑτέρου τριγώνου (σχ. 6) ἡ Γ τῇ γ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ τῇ βγ, καὶ ἡ γωνία Α ἴση α ἔσεται, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση αβ, καὶ ἡ ΑΓ ἴση αγ. καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον αβγ ἔσεται. καθότι ἡ μὲν ΒΓ ἐπὶ τῆς βγ ἐφαρμόζῃ, καὶ ἡ γωνία Β ἐπὶ τῆς β. καὶ ἡ Γ ἐπὶ τῆς γ (94) καὶ ἑπομένως ἡ ΑΒ ἐπὶ τῆς αβ πεσεῖται, καὶ τὸ σημεῖον Α ἐπί τινος σημείου τῆς αβ κείσεται, καὶ ἡ ΑΓ ἐπὶ τῆς αγ πεσεῖται, καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α ἐπί τινος σημείου τῆς αγ κείσεται, ὥστε ἐπί τινος κοινοῦ σημείου τῶν αβ, αγ ἐφαρμοσθήσεται, ἐπὶ τοῦ α δηλ. ὅθεν καὶ ἡ ΑΓ ἐπὶ τῆς αγ ἐφαρμοζομένη ἴση αὐτῇ ἔσται, καὶ ἡ ΑΒ τῇ αβ (94)

§107. Ἔτι δῆλον ἔσεται, ὅτι δύο τριγώνων, δύο γωνίας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἐχόντων, πρὸς δὲ καὶ προσκειμένας αὐταῖς πλευράς, καὶ τὰ λοιπὰ τρία ἴσα ἔσονται.

§108. Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κ.φ. τῶν λοιπῶν δύο, ΑΓ, ΒΓ (σχ. 7). καθότι, ἐπειδὴ καὶ ΑΒ ἐλαχίστη τῶν σημείων Α, Β ἐστὶν ἀπόστασις ἔσεται $ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$.

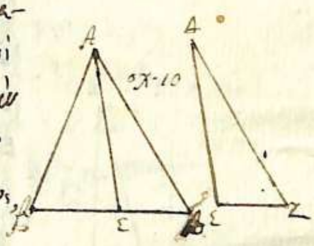


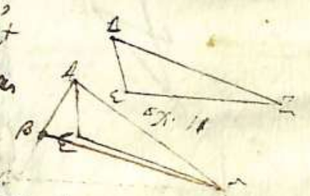
§109. Ἀπό τινος σημείου Σ ἐντὸς τριγώνου τινὸς τοῦ ΑΒΓ (σχ. 8) ληφθέντος, ἐπὶ τὰ πέρατα Β, Γ πλευρᾶς τινὸς τῆς ΒΓ, δύο ἀχθησῶν εὐθειῶν τῶν ΒΣ, ΓΣ τὸ κ.φ. τούτων ἔλασσον ἔσεται τοῦ κ.φ. τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. καθότι τῆς ΒΣ ἐπὶ τὸ Κ ἐκβληθείσης, ἐπειδὴ καὶ ΒΚ ἐλάσσων ΑΒ + ΑΚ ἐστι (108) ἔσται καὶ $ΒΚ + ΚΓ < ΑΒ + ΑΓ$, ἀλλὰ $ΣΓ < ΣΚ + ΓΚ$, καὶ ἑπομένως $ΒΣ + ΓΣ < ΒΚ + ΓΚ$ ὥστε πολλῷ μᾶλλον $ΒΣ + ΓΣ < ΑΒ + ΑΓ$.



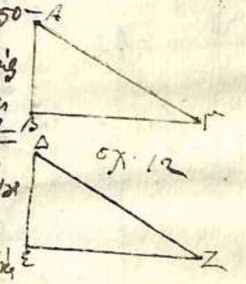
§110. Δύο τριγώνων ΑΒΓ, ΕΔΖ (σχ. 9) δύο πλευρὰς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἐχόντων τὴν $ΑΒ = ΔΕ$, φέρ' εἰπεῖν, καὶ τὴν $ΑΓ = ΔΖ$, τὰς δὲ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, τὴν ΒΑΓ δηλ. μείζονα τῆς ΕΔΖ, τὸ ἔχον τὴν μείζονα γωνίαν, ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν μείζονα, ἤγουν τὴν $ΒΓ > ΕΖ$.

Τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΓΘ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τεθέντος, ἡ μὲν ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐφαρμόζεται, ἡ δὲ ΕΖ, ἤτε ΘΓ, ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΑΓ πεσεῖται, ἐὰν δηλ. ἡ γωνία Ζ, ἤτε ἡ ΑΓΘ μείζων τῆς ΑΓΒ ὀρθῆ, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἐὰν ἴση ᾖ, τελευταῖον ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἐὰν ἐλάσσων. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ πρῶτον ὑποτεθῇ (σχ:9) ἔσεται $ΘΓ < ΘΙ+ΓΙ$, καὶ $ΑΒ < ΒΙ+ΑΙ$. ὅθεν προστεθείσης καὶ $ΘΓ+ΑΒ < ΑΘ+ΒΓ$, ἀλλὰ $ΑΒ=ΑΘ$ ἐξ ὑποθέσεως, ὥστε ἔσεται καὶ $ΘΓ < ΒΓ$. Ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον (σχ:10) δῆλον, ὅτι ἡ ΕΖ, ἤτε $ΓΕ < ΒΓ$ ἐστίν, ἐὰν δὲ τελευταῖον τὸ τρίτον ὀρθῇ (σχ:11), ἔσομεν $ΕΖ+ΔΕ$, ἤτε $ΓΕ+ΑΕ < ΑΒ+ΒΓ$ (108), ἀλλὰ καὶ $ΑΒ=ΑΕ=ΔΕ$, ὥστε ἔσεται ΓΕ, ἤτε $ΕΖ < ΒΓ$.

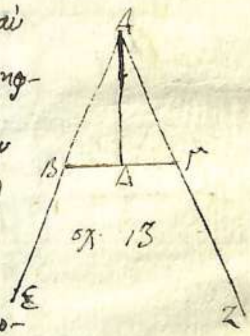

σχ:10


σχ:11

§111. Τὰ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα τρίγωνα, καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια ἔσονται, καὶ ἐπιπέδως ἴσα. καθότι, ἐπειδὴ καὶ $ΑΒ=ΔΕ$ (σχ:12), καὶ $ΑΓ=ΔΖ$, πρὸς δὲ καὶ $ΒΓ=ΕΖ$, ἔσεται καὶ $Α=Δ$, εἰ δὲ μή, καὶ ΒΓ μείζων, ἢ ἐλάσσων ἔσεται τῆς ΕΖ (110), ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ $Β=Ε$, καὶ $Γ=Ζ$. Παρατηρητέον δὲ, ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἐς ἴσας ὁμολόγως ἀντίκεινται γωνίας.

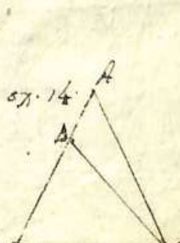

σχ:12

§112. Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ (σχ:13) ἐς ἴσας γωνίας τὰς Β, Γ ὑποτείνουσι. καὶ ἐκβληθεισῶν τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καθότι τὸ Δ σημεῖον ὡς μέσον τῆς ΒΓ σημειωθέντος, καὶ τῆς ΑΔ κατὰ τὸ μέσον αὐτὸ σημεῖον ἀχθείσης, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ἔσονται, καὶ ἐπομένως ἀλλήλοις ἰσογώνια (111). ὅθεν καὶ ἡ γωνία $Β=Γ$ ἔσεται. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $ΕΒΓ+ΑΒΓ=ΖΓΒ+ΑΓΒ$ (96) (87) τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΓΒ κοινῶς ἀφαιρεθεισῶν, ἔσεται $ΕΒΓ=ΖΓΒ$ (89)


σχ:13

§113. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνά ἐσι καὶ ἰσογώνια, μανθάνομεν δὲ πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς, ἢ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀγομένη εὐθεῖα ΑΔ, κάθετός ἐστι τῇ βάσει, καὶ ἐς δύο ἴσα τὸ ἰσοσκελές, ἢ ἰσόπλευρον διαιρεῖ τρίγωνα. καθότι, ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία $ΑΔΒ=ΑΔΓ$ ἐστί (112), ἔσεται καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ κάθετος (10), καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ ἀλλήλοις ἰσόπλευρά ἐσι, καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια, καὶ ἴσα ἔσονται (111).

§114. Ἐὰν τριγώνου δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ (σχ:14) ἴσαι ἀλλήλαις ὑπάρχωσι καὶ αἱ ἀντικείμεναι αὐταῖς πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. εἰ δὲ μή ὑποτεθήσεται τῆς $ΑΒ > ΑΓ$ δυνατὸν λαβεῖν μέρος αὐτῆς τὸ ΒΔ ἴσον τῇ ΑΓ, ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΓΔ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ ὡς ἔχοντα τὴν $ΒΔ=ΑΓ$ τὴν

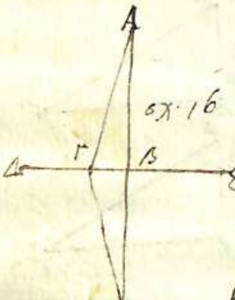
σχ:14


ΒΓ κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν $ΑΒΓ = ΑΓΒ$ ἐξ ὑποθέσεως ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.
(104), τὸ μέρος δηλ: τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον (86)

§115: Ὅθεν ἔπεται ὅτι τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον καὶ ἰσόπλευρον ἔσεται.

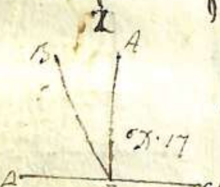
σχ: 15

§116: Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων γωνία ΑΓΒ (σχ:15) τὴν μείζονα πλευρὰν ΑΒ ὑ-
ποτείνει, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἔστω δὴ καὶ $ΑΓΒ > Β$ ὑποτίθεται, συνισταμέ-
νος αὐτῆς παρὰ ΒΓ τὸ $ΒΓΔ = Β$, καὶ ἔπεται $ΒΔ = ΓΔ$ (114) καὶ $ΑΒ = ΑΔ + ΓΔ$,
ἀλλὰ $ΑΔ + ΓΔ > ΑΓ$ (108), ὥστε καὶ $ΑΒ > ΑΓ$ ἔσεται. ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $ΑΒ >$
$ΑΓ$, ἔσεται καὶ $ΑΓΒ > Β$, εἰ δὲ μή, ἢ ἴση αὐτῇ ἔσται, ἢ ἐλάσσων, ἀλλ' ἐὰν
δοθῇ τὸ πρῶτον ἡ $ΑΒ = ΑΓ$ ἔσεται (114), ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον, ἡ $ΑΓ > ΑΒ$
ἔσται, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.



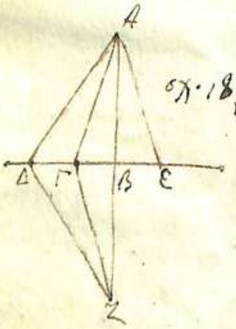
σχ: 16

§117: Ἀπό τινος σημείου Α (σχ:16) ἐκτὸς εὐθείας τινὸς τῆς ΔΕ ληφθέντος, μί-
αν μόνην κάθετον ἐπὶ ταύτην ἀγαγεῖν δυνατόν, εἰ δὲ μή, ἀχθήτωσαν δύο αἱ ΑΒ, ΑΓ
φέρ' εἰπεῖν, ἐκβληθείσης θατέρας τούτων, οἷον τῆς ΑΒ, καὶ ληφθείσης τῆς $ΒΖ =$
$ΑΒ$, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ΓΖ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΖ ἔχοντα τὴν μὲν $ΑΒ = ΒΖ$,
τὴν ΒΓ κοινήν, καὶ τὰς περὶ τὸ Β γωνίας ἴσας, ἔσονται καὶ ἀλλήλοις ἴσα (104).
Ἑπομένως δὲ καὶ ἡ γωνία $ΑΓΒ = ΒΓΖ$, ἀλλ' ἡ πρώτη ὀρθή ἐστιν ἐξ ὑ-
ποθέσεως, ὥστε καὶ ἡ θατέρα ὀρθὴ ἔσεται. τοῦτ': τὸ κ. φ. τῶν ΑΓΒ, ΒΓΖ δυσὶν
ὀρθαῖς ἴσον, καὶ ἡ ΑΓΖ εὐθεῖα ἐστί (103), ὥστε ἀφ' ἑνὸς σημείου εἰς ἕτερον
σημεῖον δύο ἄγονται εὐθεῖαι αἱ ΑΓΖ, ΑΖ, ὅπερ ἀδύνατον (95).



σχ: 17

§118: Ἀπό τινος σημείου Σ (σχ:17) ἐπί τινος εὐθείας ΔΕ ληφθέντος, μίαν μόνην κά-
θετον οἷον τὴν ΑΣ ἀγαγεῖν δυνατόν, εἰ δὲ μή ἀχθείσης καὶ ἑτέρας, οἷον τῆς
ΒΣ, ἔσονται αἱ γωνίαι ΑΣΔ, ΒΣΔ ὀρθαί (10), καὶ ἑπομένως ἴσαι (37)
τὸ μέρος δηλ: τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον (86).



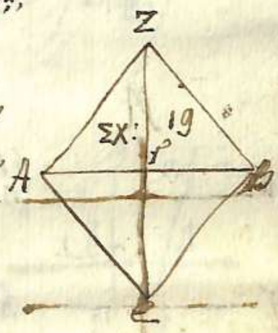
σχ: 18

§119: Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Α (σχ:18) κάθετος ἀχθῇ ἐπί τινι τῇ ΔΕ ἀχθῇ
ἡ ΑΒ, πρὸς δὲ καὶ διάφοροι πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, ΑΔ κτλ., ἡ μὲν κάθετος ἐ-
λαχίστη πασῶν τῶν πλαγίων ἔσεται, δύο δὲ πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, ἐξ ἴσου ἀ-
πὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι, ἀλλήλαις ἴσαι ἔσονται, ἡ δὲ μᾶλλον τῆς κα-
θέτου ἀπέχουσα πλαγία ΑΔ μείζων ἔσται τῆς ἧττον ἀπεχούσης ΑΓ
ἢ τῆς ΑΕ. Ἐκβληθείσης τῆς ΑΒ, καὶ τῆς $ΒΖ = ΑΒ$, ἀχθεισῶν
δὲ καὶ τῶν ΖΔ, ΖΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΖ ἔχοντα τὴν $ΑΒ = ΒΖ$,
τὴν ΒΓ κοινήν, καὶ τὰς περὶ τὸ Β γωνίας ἴσας, ἔπεται καὶ τὴν $ΑΓ =$
$ΖΓ$ (105), ἀλλ' ἡ $ΑΖ < ΑΓ + ΓΖ$ ἐστίν, ὥστε καὶ τὸ ἥμισυ
αὐτῆς ΑΒ ἔλασσόν ἐστι τῆς ἡμισείας τῶν $ΑΓ + ΓΖ$, τουτέστι τῆς ΑΓ.
τὰ τρίγωνα πάλιν ΑΒΓ, ΑΒΕ ἔχοντα τὴν ΑΒ κοινὴν

τὴν

τὴν ΒΓ = ΒΕ, καὶ τὰς περὶ τὸ Β γωνίας ἴσας, ἔσται καὶ τὴν ΑΓ = ΑΕ. τὰ τρίγωνα τετράπλευρον ΑΒΔ, ΒΔΖ ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν ΑΒ = ΒΖ, καὶ τὰς περὶ τὸ Β γωνί⁽ᵃˢ⁾, ἔσται καὶ τὴν ΑΔ = ΖΔ, ἀλλὰ ΑΔ + ΔΖ > ΑΓ + ΓΖ, (109). ὥστε καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου, ἤτοι ΑΔ > ΑΓ ἔσται. τὸ ἡμίσεος δηλ: τοῦ δευτέρου.

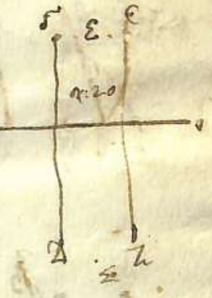
120: Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἡ κάθετος ἐλαχίστη ἐστι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου εὐθείᾳ τινὶ ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς εὐθείας παράστησιν ἀπόστασιν, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, ἀνὰ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀγαγεῖν δυνατόν.



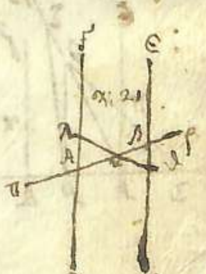
121 Ἐὰν ἀπό τινος μέσου σημείου Γ (σχ: 19) εὐθείας τινὸς τῆς ΑΒ κάθετος ἀχθῇ, ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ὡς τὸ Ζ φέρ' εἰπεῖν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, τῆς ΑΒ, ἀπέχει. ἀχθεισῶν τῶν ΑΖ, ΒΖ, τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΒΓΖ, ἔχοντα τὴν ΑΓ = ΒΓ, τὴν ΓΖ κοινήν, καὶ τὰς περὶ τὸ Γ γωνί⁽ᵃˢ⁾ ἴσας, ἔσται καὶ τὴν ΑΖ = ΒΖ (109). ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁποιονδήποτε ἕτερον σημεῖον Ε, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν Α, Β ἀπέχει σημείων.

122: ὥστε ὁποιονδήποτε σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ληφθὲν ἀνίσως ἀπὸ τῶν Α, Β, περάτων ἀποστήσεται.

123: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα οἷον τὰ ΑΓΖ, ΒΓΖ (σχ: 19) ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ΑΖ, ΒΖ, ἴσας, καὶ μίαν τινὰ τῶν λοιπῶν πλευρῶν, οἷον τὴν ΓΖ ἴσην, ἕξουσι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ΑΓ, ΒΓ, ἴσας, καὶ ἐπομένως ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. καθότι τῆς ΖΓ ἐπὶ τῆς ΖΓ ἐφαρμοσθείσης αἱ ΑΓ, ΒΓ, ἐπ' εὐθείας κείσονται, καὶ τὴν αὐτὴν ἀποτελέσουσι εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, (103). καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΖ, ΒΖ, ἴσαι ὑποτεθεῖσαι, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς καθέτου ΖΓ, ἀποστήσονται, τουτέστιν ΑΓ = ΒΓ ἔσεται, καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ἀλλήλοις ἰσόπλευρα, ὥστε καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια, καὶ ἴσα ἔσονται. (111)



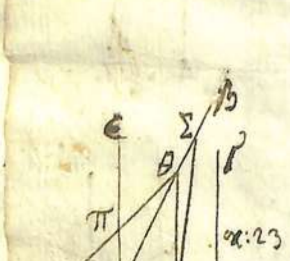
124: Δύο εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΖ, (σχ: 20) εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΑΒ, κάθετοι, πάντως παράλληλοι ἔσονται, καθότι, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι ἐκτεινόμεναι ἀλλήλαις συμπίπτουσι κατὰ τὸ σημεῖον Σ, τότε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ δύο καταχθήσονται κάθετοι, ὅπερ ἀδύνατον (117).



125: Δύο εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΖ, (σχ: 21) εὐθείᾳ τινὶ ΑΒ, συναντῶσαι, ἐὰν τὸ κ: φ: τῶν μεταξὺ γωνιῶν ΒΑΓ, ΑΒΕ ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς ποιῶσι παράλληλοι ἔσονται. καθότι ἂν τοιαῦτα εὐθεῖαι κάθετα τρίτη τινὶ τῇ ΛΘ, τῇ διὰ τοῦ μέσου σημείου κ, τῇ ΑΒ διαχωρίζειν ἔσονται, ὅτι δὲ ἡ ΛΘ κάθετος θατέρᾳ τῶν τοιούτων εὐθειῶν τῇ ΕΖ φέρ' εἰπεῖν, ἐστι, κάθετος ἄρα, καὶ τῇ ἑτέρᾳ ΓΔ, ἐκ τῶν ἐξῆς δήλων γίνεται, ἐν τοῖς τριγώτοῖς Α κ λ, Β κ θ, αἱ μὲν κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (101) ἡ δὲ Α = Β· καθότι ΓΑΒ + ΑΒΕ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἐξ ὑποθέσεως, ἀλλὰ καὶ ΑΒΕ + ΑΒΖ ἴσαι εἰσὶν δυσὶν ὀρθαῖς (96)· ἄρα ΓΑΒ + ΑΒΕ = ΑΒΕ + ΑΒΖ ἐστί· (81), καὶ τῆς ΑΒΕ κοινῆς ἀφαιρεθείσης, ΓΑΒ = ΑΒΖ, ἀφαιρεθήσεται (89). ἔτι δὲ καὶ Α κ = Β κ· ὥστε ἔσται καὶ θ = λ (101), ἀλλ' ἡ θ ὀρθὴ ὑπετέθη, ὅθεν καὶ ἡ λ ὀρθὴ ἔσται, τελευταῖον ἀμφότεραι αἱ ΓΑ, ΕΖ, κάθετοι ἔσονται τῇ λθ, καὶ ἑπομένως παράλληλοι (124)

§126: Ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι καὶ ἐὰν αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ΓΑΠ, ΕΒΡ, ἢ ὀρθαὶ ὑποτεθῶσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΕΖ· καθότι τότε καὶ αἱ ΓΑΒ, ΑΒΕ, ἢ ὀρθαὶ ἔσονται, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

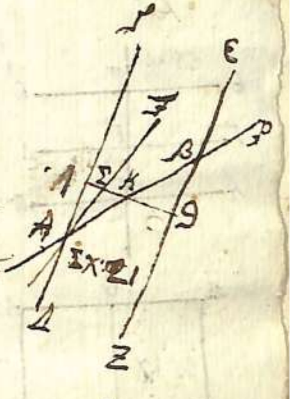
§127: Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, (σχ: 22) εὐθεῖά τινι τῇ ΛΜ συναντῶσαι, καὶ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας, οἷον τὰς Αθκ, Δκθ, ἢ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ ΔκΛ, ΑθΜ, ἴσας ποιοῦσαι, ἢ τὴν ἐκτὸς Δκθ ἴσην τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ΒθΜ, παράλληλοι ἔσονται· καθότι ὑποτεθείσης τῆς Αθκ, ἴσης τῇ ἐντὸς ἐναλλὰξ Δκθ, ἐπειδὴ καὶ Δκθ, Γκθ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν, (96), ἔσονται καὶ Αθκ, Γκθ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ ἑπομένως αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι. (125) ὑποτεθείσης δὲ Λ τῆς ἐκτὸς ΔκΛ, ἴσης τῇ ἐκτὸς ἐναλλὰξ ΑθΜ, ἐπειδὴ καὶ ΔκΛ, ΛκΓ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν, ἔσονται καὶ ΛκΓ, ΑθΜ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ ἑπομένως αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι (126) ὑποτεθείσης τελευταῖον τῆς ἐκτὸς Δκθ, ἴσης τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ΒθΜ, ἐπειδὴ καὶ ΑθΜ, Βθκ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν, ἔσονται καὶ Δκθ, Βθκ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ἑπομένως δὲ καὶ ΑΒ, ΓΔ, παράλλη[λοι]



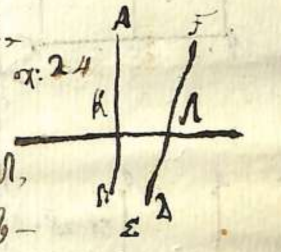
§128: Εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, (σχ: 23) ὀξεῖαν γωνίαν τὴν ΒΑΚ, μετὰ τῆς ΑΚ σχηματίζουσα, καὶ ἐπεκτεινομένη, τῇ ΑΖ· καθέτῳ τῇ ἐπὶ τῇ ΑΚ ἀχθείσῃ, καὶ ἐκβληθείσῃ, συμπεσεῖται. Πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς διαιρούσης τὴν ΑΒ καταγόμεναι κάθετοι τῇ ΑΚ, ἢ δὲ ἐπὶ τὸ Α πίπτουσι, καθότι τότε αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι τῇ ὀξείᾳ ΒΑΚ ἔσονται ὅπερ ἀδύνατον, ἢ δὲ ἐπὶ τῆς διαιρούσης ΑΛ, καθότι τότε, τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχθείσῃ καθέτῳ ΑΕ, ὡς ἡ θΖ συναντήσῃ, καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Π, φέρ' εἰπεῖν, τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΚ δύο καταχθήσονται κάθετοι ὡς αἱ ΠΖ, ΠΑ, ὅπερ ἀδύνατον (117)· ἀλλ' ἐπὶ ἐπὶ τὴν διαιροῦσαν ΑΚ πίπτουσι, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ περὶ σημείου· καθότι, ἐὰν ὑποτεθῶσι δύο τινὲς κάθετοι, ὡς θρ, Σρ, φέρ' εἰπεῖν, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον ρ συμπίπτουσι, τότε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ρ,

τῇ αὐτῇ

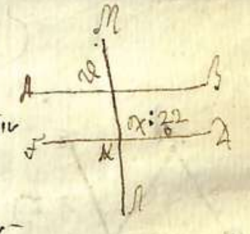
τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΛΚ δύο ἀναχθήσονται κάθετοι, ὅπερ ἀδύνατον (118). ὅθεν αἱ ἀπὸ διαφόρου σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ καταγόμεναι κάθετοι, τῇ ΛΚ, διαφόρους ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀποστήσουσι· ὥστε καὶ εἰς αὐτὸν τῇ καθέτῳ ΓΔ τετμηθήσεται. τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπεκτεινόμεναι ἀλλήλαις συναντήσουσι.



§129 Δύο εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΕ (σχ: 21) εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΑΒ συναντῶσαι, καὶ τὸ κ. φ. τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΓΑΒ, ΑΒΕ ἔλασσον δύο ὀρθῶν σχηματίζουσαι, ἐκβαλλόμεναι ἀλλήλαις συναντήσουσιν· ἡ ΑΛ κάθετος ἔστω τῇ ΛΘ (125), ἔλασσον ἄρα τῆς σημείου ΑΣ (119), ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΣΛ = ΑΛΣ ἴσαι (116), ὀξεῖα ἄρα εἶναι· ὅθεν ἡ ΓΣΘ, ὀξεῖα ἄρα ἔσται (101), ὥστε αἱ ΑΓ, ΘΕ, ἤτοι ΒΕ, ὧν ἡ μὲν ΑΓ ὀξεῖαν γωνίαν μετὰ τῆς ΛΘ, ἡ δὲ ΘΕ ὀρθὴν σχηματίζει, ἐπεκτεινόμεναι συναντήσουσιν ἀλλήλαις.



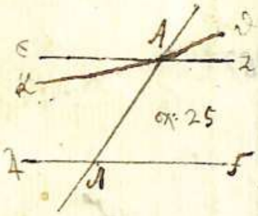
§130. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, (σχ: 24) τρίτῃ τινὶ τῇ ΚΛ συναντῶσαι, καὶ τὸ κ. φ. τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΑΚΛ, ΓΛΚ μεῖζον δύο ὀρθῶν ποιοῦσαι, ὄπισθεν συναντήσουσιν ἀλλήλαις, ἐπεκτεινόμεναι, εἰ δὲ μή, ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΛ, ΔΛΚ, ἐλάσσονες εἰσὶ δύο ὀρθῶν, δῆλον ὅτι ἐπεκτεινόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, κατά τι σημεῖον τὸ Σ ἀλλήλαις συναντήσουσι (129), τότε δὲ αἱ δύο εὐθεῖαι, ἀμφοτέρωθεν τῆς ΚΛ ἀλλήλαις συναντήσασαι, χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον.



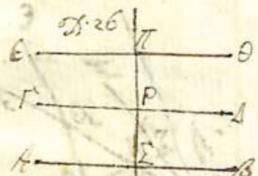
§131: ἡ παραλλήλοις ταῖς ΑΒ, ΓΔ, (σχ: 22) τέμνουσα εὐθεῖα ΛΜ, τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΑΘΚ, ΓΚΘ, ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς ποιήσει· καθότι ἐὰν μεῖζον, ἢ ἔλασσον ὑπελείπῃ, αἱ ῥηθεῖσαι εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται (129), (130), ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

§132: Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐξωτερικῶν, καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν, ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς, ἡ τοιαύτη ποιήσει εὐθεῖα, καὶ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας, καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ ἴσας, καὶ τὴν ἐκτὸς ἴσην τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, εἰ δὲ μή, τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς γωνιῶν μεῖζον, ἢ ἔλασσον ἔσται δύο ὀρθῶν, καὶ τότε αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦν, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

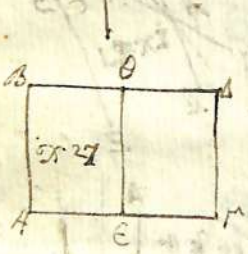
§133: Ἕπεται πρὸς τούτοις, ὅτι θατέρας τῶν ἐντὸς ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἡ ἑτέρα ὀρθὴ ἔσται. τουτέστιν, ὅτι ἡ θατέρᾳ τῶν παραλλήλων κάθετος οὖσα εὐθεῖα, κάθετος ἔσται, καὶ τῇ ἑτέρᾳ.



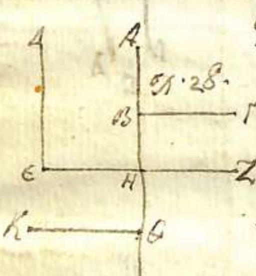
134: Διὰ τοῦ δοθέντος δῆλον γίνεται πρὸς τούτοις, ὅτι δι' ἑνὸς σημείου, οἷον τὸ Α (σχ: 25) τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΔΓ, μία μόνη εὐθεῖα παράλληλος ὡς ἡ ΕΖ, καθότι, ἐὰν ὑποθέσῃς, καὶ ἑτέραν τινά, οἷον τὴν ΚΘ, ἀχθείσης διὰ τοῦ Α τῆς ΑΛ, ἔσεται ΘΑΛ = ΑΛΔ = ΖΑΛ (132), τὸ μέρος δηλ. τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον.



135: Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, (σχ: 26) τρίτῃ τινὶ τῇ ΕΘ παράλληλοι ἔσονται καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι ἔσονται. καθότι, ἐὰν ἡ ΠΣ, κάθετος ᾖ τῇ ΕΘ, κάθετος ἔσται καὶ ταῖς ΓΔ, ΑΒ (133), καὶ ἑπομένως αἱ ΔΡΣ, ΒΣΡ, ὀρθαὶ ἔσονται, ὅθεν καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ, παράλληλοι (124).

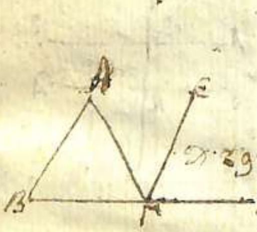


136: Τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ὡς τῶν ΑΓ, ΒΔ, (σχ: 27) ἀποτμήματα, οἷον ἐὰν ἐκ τῶν περάτων αὐτῶν, καὶ ἐκ τοῦ μέσου, ἀχθῶσι κάθετοι, ΑΒ, ΔΓ, ΘΕ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, ὀρθαὶ ἔσονται ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ ΑΕ, ΕΓ, ΒΘ, ΔΘ, ἴσαι, πρὸς δὲ καὶ ἡ ΕΘ κοινή, δῆλον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΘ, ἐπὶ τὸ ΕΔ ἐφαρμόζεται, καὶ τὸ μὲν Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ, τὸ δὲ Α ἐπὶ τὸ Γ πεσεῖται, ἑπομένως δὲ καὶ ἡ ΑΒ, ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσθήσεται, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.



137: Δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, (σχ: 28) τὰς ὡσαύτως διευθυνομένας πλευρὰς παραλλήλας ἔχουσαι, τὴν ΑΒ, δηλ. τῇ ΔΕ, καὶ τὴν ΒΓ, τῇ ΕΖ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καθότι ἐκβληθείσης τῆς ΑΒ, κατὰ τὸ Η, ἔσεται ΑΒΓ = ΑΗΖ ἀλλὰ ΑΗΖ = ΔΕΖ, (132) εἶτα καὶ ΔΕΖ = ΑΒΓ ἔσται.

138: Ἐὰν δὲ θατέρα τῶν παραλλήλων πλευρῶν κατ' ἐναντίαν διευθύνηται διευθύνουσιν, τὸ κ.φ. τῶν τοιούτων γωνιῶν ὡς τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς ἔσται. ἢ ἀνάπαλιν τούτων συμπλήρωμα τῆς φύσει. καθότι ἐπειδὴ καὶ ΔΕΗ, ΑΗΕ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσίν, ἡ δὲ ΑΘΚ = ΑΗΕ (132), ἔσονται καὶ ΔΕΖ, ΗΘΚ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς.



139: Παντὸς τριγώνου μιᾶς τινος τῶν πλευρῶν ΒΓ, ἐκβληθείσης (σχ: 29) ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΓΔ, ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον Α, Β, ἔσται. καθότι ὑποτεθείσης τῆς ΓΕ, διὰ τοῦ σημείου Γ τῇ ΑΒ, παραλλήλου ἀγομένης, ἔσται ἡ μὲν ΑΓΕ = Α, ἡ δὲ ΕΓΔ = Β (132), καὶ ἑπομένως ΑΓΕ + ΕΓΔ = ΑΓΔ = Α + Β.

140: Ἐκ τούτου δῆλον γίνεται, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς ὑπάρχουσι. καθότι, ἐπειδὴ καὶ ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσίν, ἔτι δὲ ΑΓΔ = Α + Β, εἶτα ἔσονται καὶ Α, Β, ΑΓΒ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

141: Ἐκ τούτου ἔπεται πρῶτον, ὅτι ἡ ἑκάστη γωνία παντὸς τριγώνου, καὶ αἱ δύο γωνίαι ὁμοῦ ληφθεῖσαι, συμπλήρωμά εἰσιν, ὡς πρὸς δύο ὀρθάς, καὶ ἑπομένως δύο δοθεισῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου, καὶ ἡ λοιπὴ γνωστὴ ἔσται.

142: Δεύτερον ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ἴσας ἔχῃ ἑκατέρα

ἴσας

ἀμοιβαίας, καὶ τὰς λοιπὰς ἴσας ἕξει, καὶ ἀλλήλοις, συμπίπτει ἐσόμενα τὰ τρίγωνα.

143: Τρίτον, ὅτι ὑποιονδήποτε τρίγωνον μίαν μόνην ὀρθὴν γωνίαν ἔχειν δυνατόν, ὡς καὶ μίαν ἀμβλεῖαν.

§144: Τέταρτον, ὅτι ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι μιᾷ ὀρθῇ ἰσοδυναμοῦσι, καὶ ἑκατέρα θατέρας τῶν λοιπῶν συμπλήρωμα ἐστὶ τῆς ἑτέρας.

145: Παντὸς πολυπλεύρου αἱ ἐντὸς γωνίαι πᾶσαι ὁμοῦ ληφθεῖσαι, ἴσαι εἰσὶ τοσαύταις δυσὶν ὀρθαῖς, ὅσαι ὑπάρχουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, δύο μόνον παραληφθεισῶν. καθότι ἐπειδὴ καὶ εἰς δύο πλευρὰς μία προστεθεῖσα, τρίγωνον ἀποτελεῖ, καὶ δύο ὀρθαῖς συναπαρτίζει γωνίας, καὶ ἐπειδὴ μιᾶς ἔτι προστεθείσης πλευρᾶς, ἤτε τοῦ τριγώνου εἰς τετράπλευρον μεταβληθέντος, δύο ἔτι προστίθενται ὀρθαὶ γωνίαι, ὡς τοῦ τετραπλεύρου εἰς δύο διαιρεθέντος τρίγωνα, καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει ὁσάκις μία προστίθεται εἰς πολύπλευρον πλευρά, ἢ μία ἀφαιρεῖται, τοσάκις ἓν προστίθεται εἰς αὐτό, ἢ ἓν ἀφαιρεῖται τρίγωνον, ἤτε δύο εἰς τὰς γωνίας αὐτοῦ προστίθενται ὀρθαί, ἢ δύο ἀφαιροῦνται, δῆλον, ὅτι παντὸς πολυπλεύρου πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι ὁμοῦ ληφθεῖσαι τοσαύταις δυσὶν ἔσονται ὀρθαῖς, ὅσαι εἰσὶν αἱ αὐτοῦ πλευραὶ δύο μόνον ἀφαιρεθεισῶν, ὡς μὴ χωρίον περιεχουσῶν, ὥστε ὑποτεθέντων ϖ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυπλεύρου αἱ ἐντὸς αὐτοῦ γωνίαι, ἴσαι ἔσονται $2(\varpi-2)$ ὀρθαῖς

§146: Παντὸς πολυπλεύρου τῶν πλευρῶν θατέρωθεν ἐκβληθεισῶν, τὸ κ. φ. τῶν ἐκτὸς γωνιῶν ἴσον τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἐστί. καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ κ. φ. τῶν ἐκτὸς καὶ ἐντὸς γωνιῶν, τοσαύταις δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἐστίν, ὅσαι εἰσὶν αἱ τοῦ πολυπλεύρου πλευραί, καὶ ἐπειδὴ τὸ κ. φ. τῶν ἐντὸς μόνον, ἴσον ὡσαύτως ἐστὶ τοσαύταις δυσὶν ὀρθαῖς, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραί, πλὴν δύο, δῆλον, ὅτι τοῦ κ. φ. τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἀπὸ τοῦ κ. φ. τῶν ἐκτὸς, καὶ ἐντὸς ἀφαιρεθέντος, αἱ τέσσαρες μόναι καταληφθήσονται ὀρθαί. ἔτι, φέρ' εἰπεῖν, ὑποτεθέντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ϖ, ἐπειδὴ τὸ κ. φ. τῶν ἐκτὸς, καὶ ἐντὸς γωνιῶν ἴσον 2ϖ ὀρθαῖς, ἀπὸ τούτου δέ, τοῦ κ. φ. τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἀφαιρεθέντος, ἕξομεν $2\varpi - 2(\varpi-2) = 4$, τουτέστι τὸ κ. φ. τῶν ἐκτὸς μόνον γωνιῶν ἴσον τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἔσεσθαι.

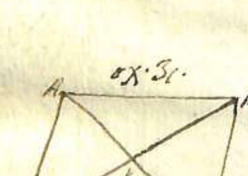
τουτέστιν ἀπὸ τοῦ 2ϖ ἀφαιρ[illegible] δὴ τὸ [illegible] ἴσον $2\varpi - 2\varpi + 4$

§147: Παντὸς πολυπλεύρου τῶν πλευρῶν ἀμφοτέρωθεν ἐκβληθεισῶν, τὸ κ. φ. πασῶν τῶν ἐκτὸς γωνιῶν, ἴσον ἐστὶν ὀκτὼ ὀρθαῖς, καὶ τὰς ἐντὸς πάσας, ἔτι τοσαύταις ἔτι δυσὶν ὀρθαῖς, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλ ραι πᾶσαι, πλὴν δύο. καθότι τῶν πλευρῶν καὶ ἑκάστης ἐκβ. μερῶν ἐκβληθεισῶν, αἱ τε ἐκτὸς γωνίαι τέσσαρες ἐπὶ ὀρθαῖς προστίθενται. εἰσὶ δὲ καὶ πᾶσαι αἱ κατὰ κορυφὴν ἐκτὸς ἴσαι ταῖς κατὰ κορυφὴν ἐντός, ὥστε αἱ ἐκτὸς πᾶσαι, ὧν ληφθεισῶν τεσσάρων δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται, ὅσαις καὶ αἱ ἐντός, καὶ ἔτι ὀκτώ, ὅτε ὅσαι εἰσὶ πᾶσαι τοῦ πολυπλεύρου αἱ πλευραί, καὶ ἔτι τέσσαρσιν ὀρθαῖς. τέλος, φέρ' εἰπεῖν ὀνομασθέντος σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, τὸ κεφ. τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἔσται $2(\sigma-2)$ ὀρθαῖς, τὸ δὲ πασῶν τῶν ἐκτὸς $2(\sigma-2)+8=2\sigma-4+8=2\sigma+4=2(\sigma+2)$

§148: Αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ παντὸς παραλληλογράμμου, οἷον τὸ ΒΓ, (σχ: 30) ὡς καὶ αἱ ἀντικείμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καθότι ἀχθείσης τῆς διαγωνίου ΑΔ, ἔσται ἡ γωνία ΒΑΔ = ΑΔΓ, καὶ ἡ ΑΔΒ = ΔΑΓ, (132), ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΔ κοινὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ, ὥστε ἔσται καὶ ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΓ = ΒΔ, (107) δῆλον γίνεται πρὸς τούτοις ὅτι καὶ αἱ γωνίαι Α, Δ, τοῦ παραλληλογράμμου, ὡς ἐξ ἰσοπλεύρων γωνιῶν ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὡσαύτως δὲ καὶ Β = Γ.

§149: Ὅθεν ἔσται, ὅτι δύο παράλληλοι ὑπὸ δύο ἀποτεμνόμεναι παράλληλοι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

§150. Πᾶν τετράπλευρον, οἷον τὸ ΒΓ (σχ: 30) τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν αὐτοῦ ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, παραλληλόγραμμον ἔσται. καθότι, τῆς διαγωνίου ΑΔ ἀχθείσης, ἐπειδὴ καὶ ΑΒ = ΓΔ, ΑΓ = ΒΔ, καὶ ΑΔ κοινή ἐστι, δῆλον ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ, ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ὄντα, καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια ἔσονται, (111), καὶ ἐσομένως, ἡ μὲν γωνία ΒΑΔ = ΑΔΓ, ἡ δὲ ΑΔΒ = ΓΑΔ. ὅθεν καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΓΔ, καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ (127).



§151. Παντὸς τετραπλεύρου, οἷον τὸ ΒΓ (σχ: 30), ἐὰν δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ φέρ' εἰπεῖν, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι ὦσι, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἔσονται. καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ = ΓΔΑ (132) ἡ δὲ ΑΒ = ΓΔ, καὶ ἡ ΑΔ κοινή, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ ΑΓΔ, καὶ ἐσομένως ἡ γωνία ΓΑΔ = ΑΔΒ, καὶ ἡ ΑΓ = ΒΔ (107). πρὸς δὲ καὶ παράλληλος, ὥστε καὶ τὸ τετράπλευρον ΒΓ, παραλληλόγραμμον ἔσται.

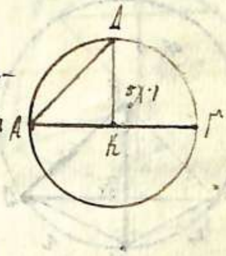
σχ·31.

§152. Παντὸς παραλληλογράμμου ΒΓ (σχ: 31) αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΒΓ εἰς δύο ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας τμήματα, καθότι, ἐπεὶ ἡ ΑΓ = ΒΔ καὶ ἡ γωνία ΚΑΓ = ΚΔΒ, καὶ ἡ ΚΓΑ = ΚΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΚ = ΒΔΚ ἔσται, καὶ ΑΚ = ΔΚ, καὶ ΓΚ = ΒΚ (107).

Βιβλίον Γον

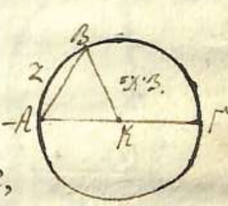
Περὶ τινῶν τοῦ κύκλου ἰδιοτήτων

Θεωρήματα

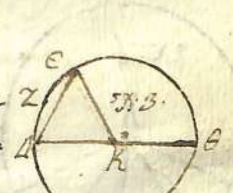


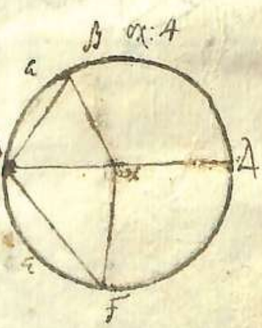
§153: Πᾶσα χορδὴ οἷον ἡ ΑΔ (σχ:1) ἐλάσσων ἐστὶ τῆς διαμέτρου οἷον τῆς ΑΓ. καθότι τῶν ἡμιδιαμέτρων ΔΚ, ΑΚ εἰς τὰ πέρατα τῆς χορδῆς ἀχθεισῶν, ἔσται ΔΚ + ΑΚ > ΑΔ (108), ἀλλὰ ΑΚ + ΔΚ = ΑΓ (25), ὥστε καὶ ΑΓ > ΑΔ ἔσται.

§154: Εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:2) κατὰ δύο μόνον σημεῖα οἷον τὰ Α, Β, τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ διατέμνει, καθότι, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι καὶ κατὰ τρία, ἐπειδὴ καὶ ταῦτα κοινὰ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας εἰσὶ σημεῖα, καὶ ἐπειδὴ αἱ ἡμιδιάμετροι πᾶσαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (25), δῆλον ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὰ κοινὰ ταῦτα σημεῖα ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καὶ ἐπομένως ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΒ τρεῖς ἄγονται ἴσαι εὐθεῖαι, ὅπερ ἀδύνατον (120).



§155: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ΑΒΓ, ΔΕΘ (σχ:3) τὰ ἴσα τόξα ΑΖΒ, ΔΖΕ, ὑπὸ ἴσων τείνονται χορδῶν, οἷον τῶν ΑΒ, ΔΕ. καὶ αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τείνουσι τόξα. ἐπειδὴ γὰρ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΕΘ, τὸ δὲ τόξον ΑΖΒ ἴσον τῷ ΔΖΕ, δῆλον ὅτι τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ΔΕΘ ἐφαρμοσθέντος, καὶ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τὸ Ε πεσεῖται, ὥστε ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμοσθήσεται, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ἐὰν δὲ ἡ χορδὴ ΑΒ = ΔΕ ὑποτεθῇ, τότε ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΔΕΚ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ὄντα, καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια εἰσίν, ἔσται καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ = ΔΚΕ. καὶ ἐπομένως τοῦ τομέως ΑΚΒ ἐπὶ τὸν ΔΚΕ ἐφαρμοσθέντος, τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε πεσεῖται. ὥστε καὶ τὸ τόξον ΑΖΒ ἐπὶ τὸ ΔΖΕ ἐφαρμοσθήσεται, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

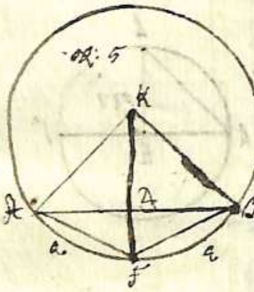




§156: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὸ μεῖζον τόξον ΑΕΓ ὑπὸ μείζονος τείνεται χορδῆς τῆς ΑΓ (σχ:4) καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐὰν ὅμως τὰ τόξα, ἐλάττονα τῆς ἡμιπεριφερείας ὑποτεθῶσι. καθότι ἐπειδὴ καὶ τοῦ τόξου μείζονος ὄντος, μείζων ὑπάρχει καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, δῆλον ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΚΒ, ΑΚΓ, τοῖς τὰς πλευρὰς ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ ἴσας ἔχουσι, μείζονος οὔσης τῆς γωνίας ΑΚΓ, τῆς ΑΚΒ, μείζων ἔσται καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ, τῆς ΑΒ.

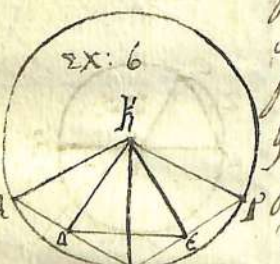
(116)· ἐὰν δὲ ἡ περιφέρεια ΑΓ, ἤτοι ἡ χορδή, μείζων τῆς ΑΒ ὑποτεθῇ, τότε μείζονος ὄντος τῆς γωνίας ΑΚΓ τῆς ΑΚΒ, μεῖζον ἔσται καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ τῆς πρώτης γωνίας, ἤτοι τὸ ΑΕΓ τοῦ ΑΕΒ ἤτοι τοῦ ὑπὸ ἐλάττονος ὑποτεινομένου γωνίας.

§157. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα μείζονα τῆς ἡμιπεριφερείας δοθῶσι, τότε τὸ μεῖζον τόξον ὑπ' ἐλάσσονος τέμνεται χορδῆς, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.



§158: Ἡ μιδιάμετρος εἰ ἡ ΚΓ (σχ: 5) κάθετος ἔσται χορδῇ τῇ ΑΒ, φέρ' εἰπεῖν, διαιρεῖ καὶ τὴν χορδήν, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς τεμνόμενον τόξον ΑΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. καθότι ἀχθεισῶν τῶν ΑΚ, ΒΚ, ΑΓ, ΒΓ, ἐπειδὴ καὶ αἱ ΑΚ, ΒΚ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσι (119)· δῆλον, ὅτι τὰ ἀποτμήματα ΑΔ, ΒΔ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΚ κάθετος ἐν τῷ μέσῳ τῆς ΑΒ ἄγεται, καὶ ἑπομένως ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς, ὡς τὸ Γ φέρ' εἰπεῖν, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, ἀπέχει (120)· ὅθεν καὶ αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΒΓ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἑπομένως δὲ καὶ ἴσα ὑποτείνουσι τόξα τὰ ΑΕΓ, ΒΕΓ (155)

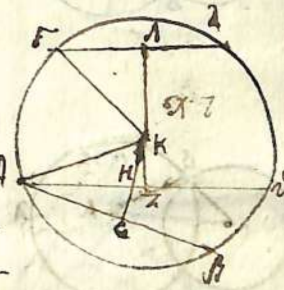
§159: Ἐπειδὴ καὶ πάσης εὐθείας ἡ διεύθυνσις διὰ δύο προσδιορίζεται σημείων (102), καὶ ἐπειδὴ τὰ τρία σημεῖα Κ, Δ, Γ, τὸ κέντρον δηλ: καὶ τὰ μέσα τῆς χορδῆς καὶ τοῦ τόξου τῆς αὐτῆς εἰσι καθέτου, δῆλον, ὅτι ἡ διὰ τῶν δύο μόνον διερχομένη εὐθεῖα, καὶ διὰ τοῦ τρίτου διελεύσεται, καὶ τὰ αὐτὰ τῇ καθέτῳ ΓΚ ἐπιδέχεται. καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα, αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ θεωρούμενα, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, ἀπέχουσι, τοτ: ἐπειδὴ καὶ σημεῖά εἰσι τῆς ἐν τῷ μέσῳ τῆς ΑΒ ἀγομένης καθέτου, δῆλον, ὅτι καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ τῆς χορδῆς ΑΒ ἀγομένη κάθετος, καὶ ἀμφοτέρωθεν ἐκβαλλομένη διὰ τοῦ κέντρου Κ, καὶ τοῦ μέσου σημείου Γ τοῦ τόξου διελεύσεται.



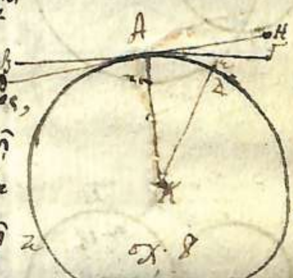
§160: Διὰ τριῶν σημείων Α, Β, Γ (σχ: 6) μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, μίαν μόνην περιφέρειαν ἀγαγεῖν δυνατόν. Ὅτι μὲν περιφέρεια τις διὰ τούτων ἄγεται τῶν σημείων, ἐκ τῶν ἑξῆς δῆλον γίνεται. καθότι ἀχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐὰν ὑποτεθῶσιν αἱ ΔΚ, ΕΚ, κάθετοι ἐν τῷ μέσῳ αὐτῶν, δῆλον, ὅτι αἱ τοιαῦται κάθετοι, ὡς σχηματίζουσαι μετά τινος εὐθείας ΔΕ τὸ ἄ.φ. τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΚΔΕ, ΚΕΔ ἔλασσον δύο ὀρθῶν, κατά τι σημεῖον τὸ Κ φέρ' εἰπεῖν ἐκβαλλόμεναι, συναντῶνται (129)· ὅθεν αἱ ἀπὸ τοῦ Κ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (121)· καὶ ἑπομένως ἡ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΑΚ γραφομένη περιφέρεια, διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ διελεύσεται. ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ κέντρον Κ κοινὸν σημεῖον ἐστι τῶν καθέτων, ΚΔ, ΚΕ, ἔπεται ὅτι οὐδεμία τις ἑτέρα περιφέρεια διὰ τῶν Α, Β, Γ διελεύσεται. καθότι, ἢ τὸ αὐτὸ ἕξει κέντρον

Κ, καὶ τότε τῇ περιφερείᾳ ΑΒΓ ταυτίζεται, ἢ ἄλλο, ὡς τότε δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, δύο ἕξουσι κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἀδύνατον.

§161: Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι δύο περιφέρειαι κατὰ δύο μόνον τέμνονται σημεῖα· καθότι ἐὰν ὑποθῶμεν, ὅτι καὶ κατὰ τρίτον, τότε τὸ αὐτὸ ἕξουσι κέντρον, ταυτίζονται δηλ. καὶ οὐ τέμνονται.

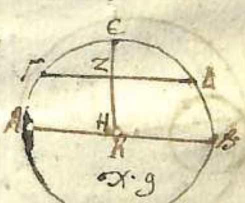


§162: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαί, ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ, (σχ.7) ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ καὶ αἱ ἴσαι ἀποστάσεις τούτων ΚΕ, ΚΛ δηλ. κάθετοι ἀπ' αὐτῶν ἀφιγμέναι. Τῶν δὲ ἀνίσων χορδῶν ΑΒ, ΑΘ, ἡ ἐλάσσων ΑΒ μᾶλλον ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχει, καὶ ἀπόστασιν τὴν ΚΕ > τῆς ΚΖ καθέτου μείζονα ἀπ' αὐτοῦ ἀφιγμένην. καθότι ἐπειδὴ αἱ ΚΛ, ΚΕ κάθετοι τὰς ΑΒ, ΓΔ ἴσας (120), δίχα, ὅτι τέμνει ἐς δύο ἴσα διαιρεῖ μέρη (158). ὅθεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΓΛ, ΑΚΕ τὰς ὑποτεινούσας ΑΚ, ΓΚ ἴσας ἔχοντα, πρὸς δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΓΛ, ἕξουσι καὶ τὰς ΚΛ, ΚΕ ἴσας (123). ἐπειδὴ δὲ καὶ ΚΕ > ΚΗ, ἡ δὲ ΚΗ > ΚΖ (119), πολλῷ μᾶλλον ΚΕ ἀπόστασις δηλ. τῆς ἐλάσσονος χορδῆς μείζων ἐστὶ τῆς ΚΖ, ἤτοι τῆς ἀποστάσεως τῆς μείζονος χορδῆς.



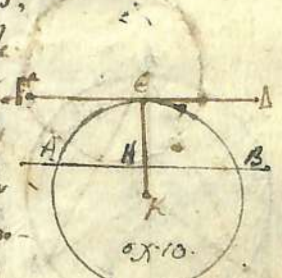
§163: Ἡ τῷ πέρατι Α (σχ.8) ἡμιδιαμέτρου ὅσον τῆς ΑΚ ὀρθὴ κάθετος, ὡς ἡ ΒΓ, ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ΑΖΛ, ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον αὐτῇ ἔχουσα τὸ Α, εἰ δὲ μή, ἐχέτω καὶ τὸ Ε. καὶ τότε ἡ ΚΕ ὡς μὲν πλαγία μείζων ἔσται τῆς ΑΚ καθέτου (119), ὡς δὲ ἡμιδιάμετρος τοῦ κύκλου, ἴση τῇ αὐτῇ ΑΚ, ὅπερ ἀδύνατον.

§164: Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ πᾶσα ἐφαπτομένη ΒΓ κάθετος ἐστι τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΑΚ, εἰ δὲ μή, ὑποτεθείσης καθέτου τῆς ΚΕ, ἡ ΑΚ πλαγία οὖσα, μείζων ἐστὶ τῆς ΚΕ καθέτου (119), ἀλλὰ ΑΗ = ΑΚ, ὥστε καὶ ΑΗ > ΕΚ ἕπεται. τὸ μέρος δηλ. τοῦ ὅλου, ὅπερ ἀδύνατον.

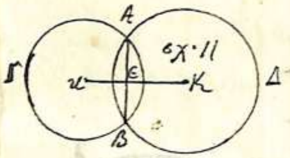


§165: Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς περιφερείας ἀχθείσης μίαν μόνην ἐφαπτομένην αὐτῇ, οἷον τὴν ΒΓ ἀγαγεῖν δυνατόν. εἰ δὲ μή, ὑποτεθείσης καὶ τῆς ΘΗ, ἔσονται αἱ ΒΑΚ, ΘΑΚ ὀρθαὶ (164), καὶ ἐπομένως ἴσαι (34) τὸ ὅλον δηλ. τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον.

§166: Δύο παράλληλοι ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ, (σχ.9) ἴσα τόξα οἷον τὰ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ τῆς περιφερείας διαχωρίζουσιν, ἡ ΚΕ ἡμιδιάμετρος κάθετος ὑποτεθεῖσα τῇ ΓΔ, κάθετος ἐστι καὶ κατὰ τὸ μέσον τῆς ΓΔ (133) (158). καὶ ἐπομένως ἡ μὲν ΑΗ = ΒΗ, τὸ δὲ τόξον ΑΓΕ = ΒΔΕ, καὶ τὸ ΓΕ = ΔΕ

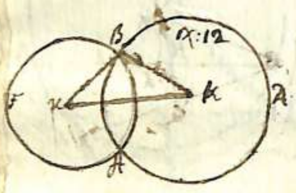


(158) ὥστε τῶν ἴσων τόξων κοινῶν ἀφαιρεθέντων, ἕπεται καὶ τὸ τόξον ΑΓ = ΒΔ. Ἐὰν δὲ ἡ μία τῶν παραλλήλων ὡς ἡ ΓΔ (σχ:10) ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ὑποτεθῇ, τότε ἡ ἡμιδιάμετρος ΕΚ κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ ΓΔ (164)

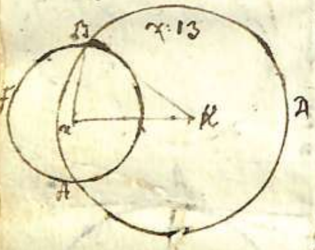


κάθετος, ἔσται καὶ τῇ ΑΒ, (133), καὶ ὡς δύο αὐτὴν εἰς τὰ ὑποτεινόμενα τόξου δίχα μέρη (158), ὅθεν ἔσται ΑΕ = ΒΕ.

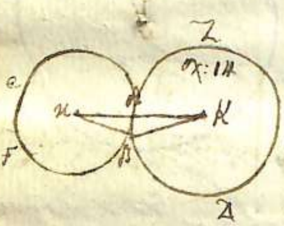
§167: Ἐὰν δύο περιφέρειαι, ὡς αἱ ΑΒΓ, ΑΒΔ (σχ:11) ἀλλήλας τέμνωσιν, ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν διερχομένη, κάθετος ἔσται κατὰ τὸ μέσον σημεῖον Ε τῆς κοινῆς αὐτῶν χορδῆς, καθότι ἡ ἐν τῷ μέσῳ τῆς ΑΒ ὀρθογώνιος κάθετος, διὰ τῶν κέντρων κ, Κ διέρχεται, (159), καὶ ἐπειδὴ ἀπό τινος σημείου εἰς ἕτερον σημεῖον μία μόνη ἄγεται εὐθεῖα, δῆλον, ὅτι, καὶ ἡ διὰ τῶν κέντρων διερχομένη, διὰ τοῦ μέσου σημείου Ε τῆς ΑΒ διελεύσεται, καὶ κάθετος αὐτῇ ἔσται.



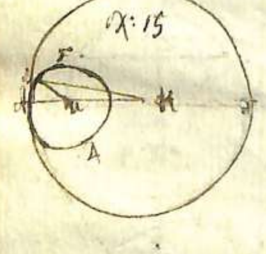
168: Ὅταν ἡ ἀπόστασις δύο κέντρων οἷον ἡ κΚ (σχ:12) (σχ:13) ὡς τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἐλάσσων ᾖ τοῦ κ:φ: τῶν δύο ἡμιδιαμέτρων Βκ, ΒΚ πρὸς δὲ καὶ ἡ μείζων ἡμιδιάμετρος ΒΚ, ἐλάσσων τῆς λοιπῆς ἡμιδιαμέτρου Βκ καὶ τῆς τῶν κέντρων ἀποστάσεως κΚ, τότε οἱ δύο κύκλοι ἀλλήλους τέμνουσιν, ὁσάκις δύο κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, τοσάκις τὸ τρίγωνον ΒκΚ τὸ διὰ τῆς ἀποστάσεως δηλ: τῶν κέντρων, καὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Β, ἢ Α ἀποτελούμενον, δυνατόν ἐστιν, ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον τρίγωνον τότε μόνον συντεθῆναι δύναται, ὅταν ἡ κΚ πλευρὰ ἀπόστασις δηλ: τῶν δύο κέντρων ἐλάσσων τῶν Βκ, ΒΚ ὑπάρχῃ· πρὸς δὲ καὶ ὅταν ἡ ΒΚ ἡ μείζων δηλ: ἡμιδιάμετρος ἐλάσσων τῶν Βκ, κΚ (108), ὥστε, ὅταν ταῦτα δοθῶσι, τότε καὶ οἱ δύο κύκλοι ἀλλήλους τέμνουσι,



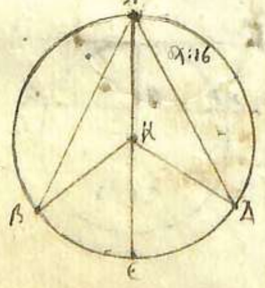
§169: Ὅταν ἡ ἀπόστασις δύο κέντρων κ, Κ ἴση δοθῇ τῷ κ:φ τῶν δύο ἡμιδιαμέτρων Ακ, ΑΚ (σχ:14), τότε οἱ δύο κύκλοι ΑΓΕ, ΑΔΖ ἀλλήλων ἐφάπτονται, ἓν μόνον ἔχοντες κοινὸν σημεῖον τὸ Α, εἰ δὲ μή, ἐχέτωσαν καὶ τὸ Β, τότε ἀχθήσονται τῶν κΒ, ΚΒ, ἐπεὶ ἡ κΚ ἀπόστασις τῶν δύο κέντρων ἐλάσσων τοῦ κ:φ: τῶν ἡμιδιαμέτρων, κΒ, ΚΒ (108), ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.



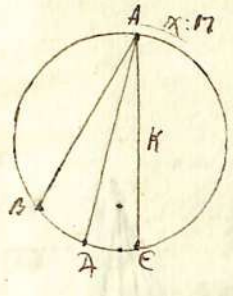
§170: Ὅταν ἡ ἀπόστασις δύο κέντρων κ, Κ (σχ:15) ἴση δοθῇ τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ἡμιδιαμέτρων Ακ, ΑΚ, τότε αἱ δύο κύκλων περιφέρειαι ἐντὸς ἀλλήλων ἐφάπτονται, ἓν μόνον κοινὸν ἔχουσαι σημεῖον τὸ Α ἐφ' ἑαυτῶν, εἰ δὲ μή, ἐχέτωσαν καὶ τὸ Β, τότε δὲ ἀχθήσονται τῶν ἡμιδιαμέτρων ΒΚ, Βκ, ἔσται ΒΚ = ΑΚ, ἀλλὰ Ακ + κΚ = ΑΚ, ὥστε καὶ Βκ + κΚ = ΒΚ, ὅπερ ἀδύνατον (108)



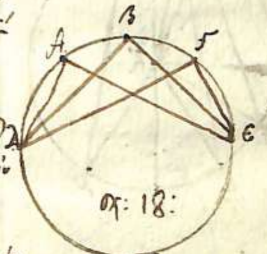
§171: Ἐκ τούτων δῆλον γίνεται, ὅτι δύο περιφερειῶν ἐκτός, ἢ ἐντὸς ἀλλήλων ἐφαπτομένων, τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖνται εὐθείας. εἰ δὲ μή, δύο εὐθεῖαι κοινὰ δύο ἔχουσι σημεῖα, ἀπ' ἀλλήλων διαχωρίζονται, ὅπερ ἀδύνατον.



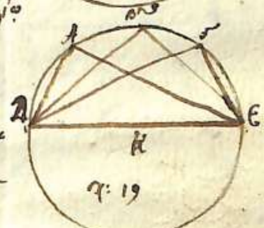
§172: Πᾶσα ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένη γωνία, ὡς ἡ ΒΑΔ (σχ:16) ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑποτείνοντος τόξου ΒΕΔ τοῦ διὰ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δηλ: διατεμνομένου, καθότι τοῦ κέντρου Κ ἐντὸς τῆς ῥηθείσης ὑποκειμένου γωνίας, ἀχθήσονται τῶν ἡμιδιαμέτρων ΒΚ, ΑΚ, καὶ τῆς διαμέτρου ΑΕ, ἔσται ἡ ἐπι-



ὅλη ἄρα γωνία ΑΚΕ ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ΔΑΚ, ΑΔΚ (137), ἤγουν ἴσον τοσοῦν τοῦ ἰδίου γωνιῶν, διὰ τὸ ἰσοσκελὲς εἶναι τρίγωνον ΑΔΚ (112) καὶ γωνία ΑΚΕ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΔΕ. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΚΕ διπλασία ἐστὶ τῆς ΒΑΕ, ὥστε ἡ ΒΚΔ διπλασία ἐστὶ τῆς ΒΑΔ, ἀλλ' ἡ πρώτη μέτρον ἔχει τὸ ὅλον τόξον ΒΕΔ (35), ὥστε ἡ δευτέρα μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ῥηθέντος τόξου. τοῦ κέντρου δὲ ἐκτὸς τῇ γωνίᾳ ΒΑΔ (σχ 17) ὄντος, τῆς διαμέτρου ΑΚΕ ἀχθείσης, ἡ γωνία ΒΑΕ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔΕ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΔΑΕ τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΕ, ὥστε καὶ ἡ ΒΑΔ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ.

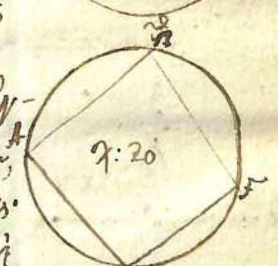


§173: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ γωνίαι ΑΒΕ, ΑΘΕ, ΑΖΕ, ... (σχ. 18) αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου ἐγγεγραμμέναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς ἔχουσαι κοινὸν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔΕ.

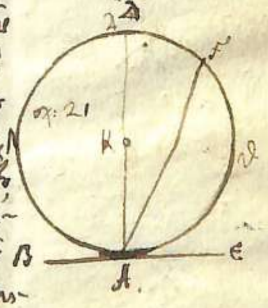


§174. Δεύτερον ὅτι πᾶσα γωνία ΑΔΕ, ΑΒΕ, ΑΖΕ, ... (σχ. 19) ἐν ἡμικυκλίῳ ἐγγεγραμμένη ἴση ὀρθῇ ἐστίν, ὡς ἔχουσα μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΕ, ἤτοι τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας.

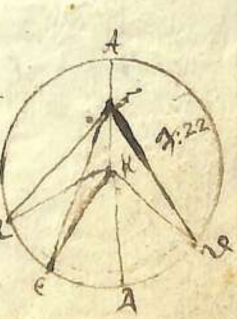
§175. Τρίτον, ὅτι πᾶσα γωνία ἐν μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι ἐγγεγραμμένη ὀξεῖα ἐστὶν ὡς ἔχουσα μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἐλάττονος τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου, ἐν ἐλάσσονι δὲ ἐγγεγραμμένη τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι ἀμβλεῖα ἐστὶν ὡς ἔχουσα μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μείζονος τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου.



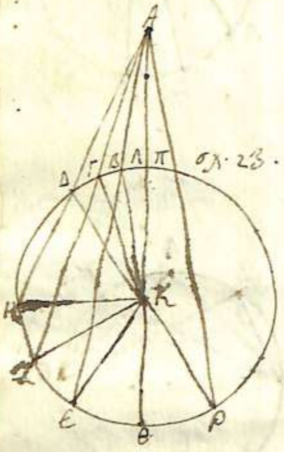
§176: Τέταρτον ὅτι παντὸς τετραπλεύρου ΑΒΖΔ (σχ: 20) ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου αἱ ἀπεναντίον γωνίαι ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσίν, ὡς μέτρον ἔχουσαι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, ὅπερ δύο καταμετρεῖ ὀρθάς.



§177: Ἡ γωνία ΒΑΖ, ἡ ΖΑΕ (σχ: 21) ἡ διὰ τῆς ἐφαπτομένης δηλ. ΒΕ, καὶ χορδῆς τινὸς τῆς ΑΖ σχηματιζομένη, μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ διὰ τῆς χορδῆς ἀποτεμνομένου τόξου, ἡ μὲν ΒΑΖ δηλ. τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΛΔΖ, ἡ δὲ ΖΑΕ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΘΖ. καθότι ἀχθείσης διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α τῆς διαμέτρου ΑΚΔ, ἔσται ἡ ΒΑΔ ὀρθὴ (164), καὶ ἑπομένως μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΛΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΑΖ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΖ τόξου (172), ὥστε ἡ ὅλη γωνία ΒΑΖ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΑΛΔΖ τόξου καταμετρηθήσεται. ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ΒΑΖ, ΖΑΕ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσί, ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης μετροῦνται περιφερείας, μετρεῖται δὲ ἡ ΒΑΖ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΑΛΔΖ, ὥστε καὶ ἡ ΖΑΕ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΑΘΖ καταμετρηθήσεται.

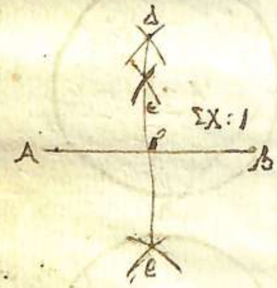


§178: Ἐπὶ διαμέτρου οἷον τῆς ΑΔ (σχ: 22) σημείου τινὸς τοῦ Ζ ἐκτὸς τοῦ κέντρου ληφθέντος, καὶ διαφόρων ἀπ' αὐτοῦ εἰς τὴν περιφέρειαν ἀχθεισῶν εὐθειῶν, τῶν ΖΑ, ΖΕ, ΖΛ, ΖΘ ... ἡ μὲν ΖΑ, ἐφ' ἧς δηλ. τὸ κέντρον ἐστί, μεγίστη πασῶν τῶν τοιούτων ἐστὶν εὐθειῶν, ἡ δὲ μᾶλλον αὐτῇ προσεγγίζουσα ΖΕ μείζων Λ τῆς ἧττον προσεγγιζούσης $\digamma Z$, ἀνὰ δύο δὲ μόναι ἑκατέρωθεν τῆς $\digamma A$ προσπίπτουσαι ὡς αἱ $\digamma E$, $\digamma \Theta$, καὶ ἴσα τόξα ἀπὸ τῆς $\digamma A$ ἀφιστάμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀχθεισῶν τῶν ἡμιδιαμέτρων KZ, KE, $K\Theta$, ἔσται $\digamma K + KE > \digamma E$ (108), ἀλλὰ $\digamma K + KE = \digamma A$, ὥστε καὶ $\digamma A > \digamma E$ ἔσται. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις $\digamma KE$, $\digamma KZ$ ἡ $\digamma K$ κοινὴ ἐστίν, ἡ δὲ $KZ = KE$, ἡ δὲ γωνία $\digamma KE > \digamma KZ$, ἔσται καὶ $\digamma E > \digamma Z$ (110). Ἐν τοῖς τριγώνοις πάλιν $\digamma KE$, $\digamma K\Theta$ τῆς γωνίας $\digamma KE$ ~~=~~ $\digamma K\Theta$ ἴσης, ὡς ἴσης καὶ τῆς $AKE = AK\Theta$, ἔσται καὶ $\digamma E = \digamma \Theta$ (104)



§179: Ἀπό τινος σημείου A (σχ: 23) ἐκτὸς κύκλου ληφθέντος, εἰς διαφόρους καὶ εἰς τὴν κοίλην, καὶ εἰς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν ἀχθεισῶν εὐθειῶν, τῶν μὲν εἰς τὴν κοίλην μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσα, ἡ δὲ μᾶλλον αὐτῇ προσεγγίζουσα μείζων τῆς πορρώτερον ἀπεχούσης ἐστί, τῶν δὲ εἰς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου οἷον ἡ $A\Lambda$, ἡ δὲ μᾶλλον αὐτῇ προσεγγίζουσα ἐλάσσων τῆς ἧττον προσεγγιζούσης ἐστί, ἀνὰ δύο δὲ μόναι καὶ τῶν εἰς τὴν κοίλην, καὶ τῶν εἰς τὴν κυρτὴν ἀχθεισῶν κατὰ ἴσα τόξα ἑκατέρωθεν, ἤτοι τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι τῆς ἐλαχίστης ἀπέχουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
Ἡ δὴ εὐθεῖα $AKE > AE$ ἐστίν (108), ἀλλ' ἡ αὐτὴ $AKE = A\Theta$ ἐστίν, ὥστε καὶ $A\Theta > AE$ ἔσται. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις AKZ, AKE ἡ γωνία $AKE > AKZ$ ἐστί, ἔσται καὶ $AE > AZ$ (110), ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθήσεται καὶ $AZ > AH$, ἐπειδὴ πάλιν καὶ ἡ εὐθεῖα $ABK > AK$, ἡ δὲ $BK = \Lambda K$, τῶν ἴσων τούτων ἀπὸ τῶν ἀνίσων ἀφαιρεθεισῶν, ἔσται $AB > A\Lambda$, ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα $A\digamma K$ μείζων ἐστὶ τῆς εὐθείας ABK (109), ἔσται διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $A\digamma > AB$, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ $A\Delta > A\digamma$, ἐπειδὴ τελευταῖον καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις AKE, $AK\rho$, ἡ γωνία $AKE = AK\rho$ ἐστίν, ἔσται καὶ ἡ $AE = A\rho$ (104), ἐστὶ δὲ καὶ $EB = \Pi\rho$ (162), ὥστε καὶ $AB = A\Pi$ ἔσται.

Προβλήματα διὰ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων ἐπιλυόμενα

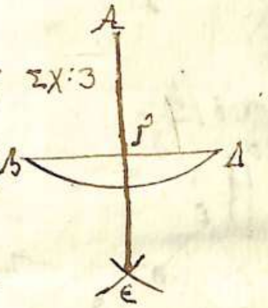


§180 Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB (σχ:1) εἰς δύο ἴσα τεμεῖν τμήματα, κέντροις τοῖς A, B, διαστήματι δὲ μείζονι τοῦ ἡμίσεος τῆς AB γράφω δύο τόξα, κατὰ τὸ σημεῖον τὸ Δ ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν περάτων A, B ἀπέχον, τεμνόμενα. Εὑρίσκω δὲ ὡσαύτως καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ E ἄνωθεν, ἢ κάτωθεν τῆς AB ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων ἀπέχον, ἐὰν δὲ τὰ εὑρεθέντα ταῦτα σημεῖα διά τινος ζευχθῶσιν εὐθείας, οἷον τῆς ΔE, ἡ AB εἰς δύο ἴσα ὑπ' αὐτῆς κατὰ τὸ $\digamma$ τμηθήσεται τμήματα, καθότι, ἐπειδὴ καὶ τὰ σημεῖα Δ, E ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν περάτων ἀπέχουσι, δῆλον, ὅτι εἰς τὴν ἐν τῷ μέσῳ τῆς AB ὀρθὴν κάθετον πεσοῦνται (127) ἡ ὁποία διὰ καὶ τὸ $\digamma$, ὅθεν $A\digamma = B\digamma$ ἐστί.

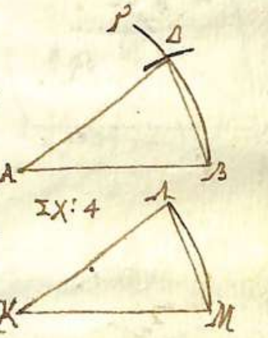
§181: Ἀπό τινος σημείου A (σχ: 2) ἐπ' εὐθείας $B\digamma$ δοθέντος, κάθετον αὐτῇ ἀναγαγεῖν, ληφθείσης τῆς $AB = A\digamma$ κέντροις δὲ τοῖς B, $\digamma$, διαστήματι δὲ μείζονι τοῦ ἡμίσεος τῆς $B\digamma$ δύο τόξων γραφέντων, κατὰ τὸ σημεῖον Δ τεμνομένων, ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον A, καὶ τὸ εὑρεθὲν Δ ζευχθῶσιν, ἡ αὐτὰ ζευγνῦσα ΔA

ἡ ζητουμένη ἔσται. καθότι ἑκάτερον τῶν Α, Δ ἐξίσου ἀπὸ τῶν περάτων ἀπέχει, δῆλον ὅτι ὀρθὴ κατὰ τὸ μέσον τῆς ΒΓ προσπίπτει κάθετος, (121)
(121)

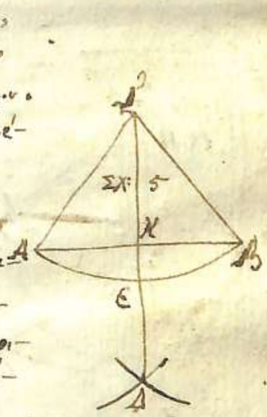
§182: Ἀπό τινος σημείου Α (Σχ:3) ἐπὶ εὐθεῖαν δοθεῖσαν, κάθετον ἀγαγεῖν. Κέντρῳ τῷ δοθέντι Α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, τόξου γραφέντος, καθ' ἃ δύο σημεῖα Β, Δ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τέμνοντος, εὑρεθέντος δὲ τινος σημείου Ε, ἐξίσου ἀπὸ τῶν Β, Δ ἀπέχοντος, ὡρισθέντος, ἐὰν τὸ δοθὲν Α, καὶ τὸ εὑρεθὲν Ε ζευχθῶσιν, ἡ ζευχθεῖσα αὐτὰ ΑΕ, ἡ ζητουμένη ἔσται. καθότι, ἑκάτερον τῶν Α, Ε, ἐξίσου ἀπὸ τῶν περάτων Β, Δ ἀπέχει, δῆλον ὅτι ὀρθὴ κατὰ τὸ μέσον τῆς ΒΔ ὑποτεινόμενον κάθετον προσπίπτουσιν, ἐπομένως δὲ ἡ ΑΕ κάθετος τῇ ΒΔ κατὰ τὸ Γ ἔσται. (121)



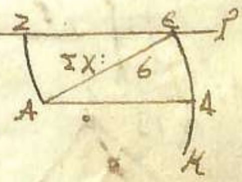
§183: Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ Α (Σχ:4) τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ ἴσην γωνίαν τῇ δοθείσῃ Κ κατασκευάσαι. Κέντρῳ τῷ Κ διαστήματι δὲ καθ' ἀρέσκειαν, γράφω τόξον τὸ ΛΜ, κέντρῳ δὲ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ, γράφω τόξον τὸ ΒΓ, κέντρῳ δὲ τῷ Β, διαστήματι δὲ τῇ χορδῇ ΛΜ γράφω τόξον τέμνον τὸ ΒΓ, κατά τι σημεῖον Δ. ζευχθέντων τῶν Α, Δ, ἡ γωνία ΒΑΔ ἡ ζητουμένη ἔσται, καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ τόξα ΛΜ, ΒΔ ὑπὸ ἴσων τεινόντων χορδῶν τῶν ΛΜ, ΒΔ, δῆλον ὅτι ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι ΛΚΜ, ΒΑΔ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (155)

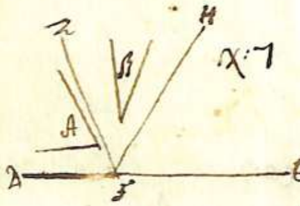


§184: Τὸ δοθὲν τόξον ΑΕΒ (Σχ:5) ἢ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΑΓΒ διχοτομῆσαι. Τοῦ τόξου ΑΕΒ δοθέντος, ἐπομένως δὲ καὶ τοῦ σημείου Γ, ἤτοι τοῦ κέντρου αὐτοῦ, εὑρίσκω ὡς ἀνωτέρω (180) καὶ ἕτερον σημεῖον Δ ἐξίσου ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, ἀπέχον. ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ ἐξίσου ἀπὸ τῶν Α, Β, δῆλον, ὅτι ὀρθὴ τὴν ἐν τῷ μέσῳ τῆς ΑΒ κάθετον προσπίπτουσιν, ὅθεν καὶ ἡ ζευχθεῖσα ταύτας ΓΔ τὸ τόξον ΑΕΒ κατὰ τὸ Ε διχοτομεῖ. Δοθείσης δὲ τῆς γωνίας ΑΓΒ, κέντρῳ τῷ σημείῳ τῆς κορυφῆς Γ, διαστήματι δὲ καθ' ἀρέσκειαν, τοῦ τόξου ΑΕΒ γραφέντος, καὶ τοῦ σημείου Δ ὡσαύτως εὑρεθέντος, ἡ ΑΓΒ διὰ τῆς ζευχθείσης ΓΔ διχοτομηθήσεται. καθότι ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΓΚ, ΒΓΚ ἡ ΑΚ = ΒΚ ἐστίν, ἡ ΓΚ κοινή, καὶ ἡ γωνία ΑΚΓ = ΒΚΓ, ὥστε καὶ ΑΓΚ = ΒΓΚ ἔσται, ἐὰν δὲ καὶ ἑκάτερον μέρος τοῦ τόξου, καὶ τῆς γωνίας ὁμοίως διχοτομηθῇ, καὶ τὸ δοθὲν τόξον ἢ ἡ δοθεῖσα γωνία εἰς τέσσαρα ἴσα τμηθήσεται τμήματα. ἐὰν δὲ τὴν τῶν μερῶν διχοτομίαν κατὰ συνέχειαν τέλος ἐπαναλάβωμεν, τὸ τόξον καὶ ἡ γωνία εἰς 8, 16, 32, ... ἴσα τμήματα διαιρεθήσονται.



§185: Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α (Σχ:6) παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΒΓ ἀγαγεῖν. κέντρῳ τῷ Α, διαστήματι δὲ καθ' ἀρέσκειαν γράφω τόξον τὸ ΕΚ, κέντρῳ δὲ τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΑΕ γράφω τόξον τὸ ΑΖ, ἀφελὼν δὲ μέρος τῷ ΕΚ τὸ ΕΔ = ΑΖ καὶ τὰ σημεῖα Α, Δ ζεύξας, ἔχω τὴν ζητουμένην ΑΔ, ἐπειδὴ καὶ τὰ τόξα ΑΖ, ΕΔ ἰσομήκη

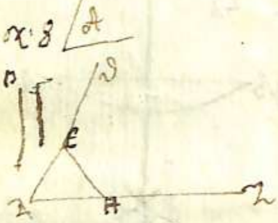




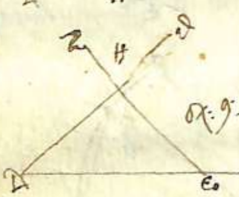
σχ: 7

ᾗσι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΔΕΖ, ΕΔΑ, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ [illegible] ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ἔσονται δὲ αἱ ΑΔ, ΔΓ παράλληλοι (127).

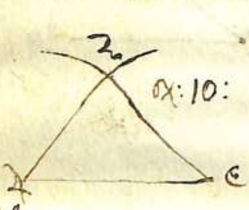
§186. Δύο δοθεισῶν γωνιῶν τῶν Α, Β (σχ. 7) τριγώνου τινὸς τὴν τρίτην εὑρεῖν. Γράψον τὴν ΔΕ καὶ ἀρεσκόντως, κατασκεύαζε πρὸς τινι αὐτῆς σημείῳ τῷ Γ τὴν γωνίαν ΔΓΖ = Α, καὶ τὴν ΖΓΗ = Β (183), καὶ ὅλως ἔχω τὴν λοιπὴν ΗΓΕ ἴσην τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου γωνίᾳ. Καθότι, ἐπειδὴ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, δῆλον ὅτι καὶ ἡ ΕΓΗ ἴση τῇ ζητουμένῃ ἔσται.



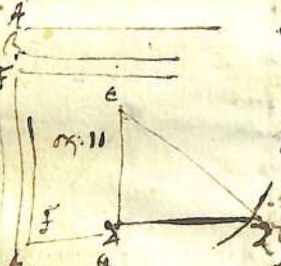
§187. Δύο δοθεισῶν πλευρῶν Β, Γ (σχ. 8) καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Α, τὸ τρίγωνον καταγράψαι. Ἀγαγὼν τὴν ΔΖ ἀδιορίστως, λαμβάνω τὴν ΔΗ = Β, κατασκευάζω δὲ καὶ τὴν Δ = Α, λαβὼν δὲ καὶ τὴν ΔΕ = Γ ζευγνύω τὴν ΕΗ καὶ ὅλως ἔχω τὸ τρίγωνον ΕΔΗ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον.



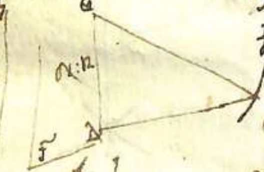
§188. Δύο δοθεισῶν τριγώνου τινὸς γωνιῶν καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τὸ τρίγωνον καταγράψαι, τὴν ΔΕ (σχ. 9) ἴσην τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ἀγαγὼν, κατασκευάζω τὴν μὲν Δ γωνίαν ἴσην θατέρᾳ τῶν δοθεισῶν, τὴν δὲ Ε ἴσην τῇ ἑτέρᾳ (183), τότε δὲ αἱ δύο αὐτῶν πλευραὶ ΔΘ, ΕΖ κατά τι σημεῖον τὸ Η τεμνόμεναι, τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΗ συναπαρτίζουσι. Ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι γωνίαι μὴ προσκείμεναι ὦσι τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ, τότε δύο τοῦ τριγώνου γωνιῶν γνωσθεισῶν καὶ ἡ λοιπὴ, ἤτε ἡ ἑτέρα προσκειμένη γνωσθήσεται, καὶ διὰ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν τὸ ζητούμενον εὑρεθήσεται.

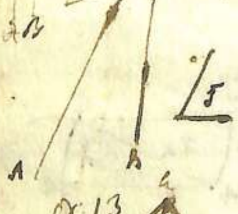


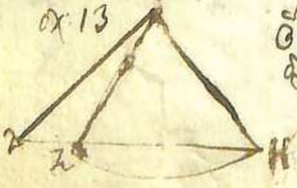
§189. Δοθεισῶν τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, Α, Β, Γ (σχ. 10) τὸ τρίγωνον καταγράψαι. Τὴν ΔΕ = Α λαβὼν, κέντροις τοῖς Δ, Ε, διαστήμασι δὲ τοῖς Β, Γ γράφω τόξα κατὰ τὸ Ζ τεμνόμενα, καὶ ὅλως διὰ τῆς ἐπιζεύξεως τῶν Δ, Ζ, Ε εὑρίσκω τὸ τρίγωνον ΔΖΕ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον. Δῆλον δὲ, ὅτι μιᾶς τῶν πλευρῶν μείζονος ἢ κ.φ. τῶν [illegible] δύο δοθείσης, τὸ πρόβλημα ἀδύνατον ἔσται.



§190. Δοθεισῶν τῶν πλευρῶν Α, Β (σχ. 11) καὶ τῆς ἀντικειμένης τῇ Β πλευρᾷ γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον καταγράψαι. Τῆς γωνίας Γ ὀρθῆς ἢ ἀμβλείας ὑποτεθείσης, κατασκευάσας τὴν Δ = Γ, λαμβάνω τὴν ΔΕ = Α, κέντρῳ δὲ τῷ Ε, καὶ διαστήματι τῷ Β, γράφω τόξον τὴν ΔΖ κατά τι σημεῖον τὸ Ζ τέμνον· καὶ ὅλως εὑρίσκω τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον. Τῆς γωνίας δὲ Γ ὀξείας δοθείσης, τῆς δὲ Β πλευρᾶς μείζονος τῆς Α (σχ. 12), διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εὑρίσκω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον. Τῆς γωνίας δὲ Γ ὀξείας δοθείσης, τῆς δὲ Β πλευρᾶς ἐλάσσονος τῆς Α (σχ. 13), τὸ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ Β γραφθὲν τόξον ΖΗ, κατὰ δύο σημεῖα τὴν ΔΗ διατέμνει, τὰ Ζ, Η δηλονότι, ὅθεν καὶ δύο ἔσονται τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΕΗ, τὸ πρόβλημα ἐπιλύοντα, ὅταν δὲ ἡ Β πλευρὰ ἐλάσσων τῆς ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΔΖ καθέτου [illegible], τότε τὸ πρόβλημα ἀδύνατον ἔσται.

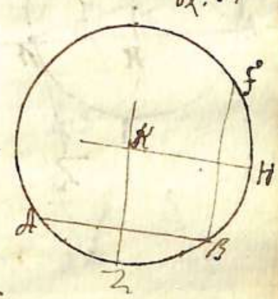




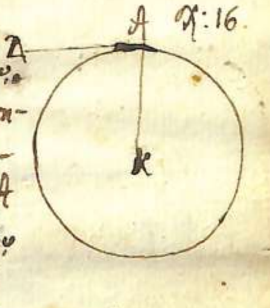


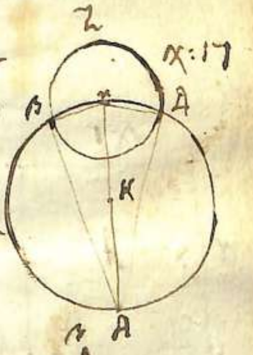
§191: Δοθέντων τῶν πλευρῶν Α, Β (σχ:14) καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Γ τὸ παραλληλόγραμμον καταγράψαι. Ἀγαγὼν τὴν ΔΕ = Α καὶ τὴν γωνίαν ΖΔΕ = Γ κατασκευάσας, τεμὼν δὲ καὶ τὴν ΔΖ = Β, γράφω δύο τόξα τὸ μὲν κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι τῷ ΔΕ, τὸ δὲ κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι τῷ ΔΖ ἐπιζευγνύουσα τὰ σημεῖα Ζ, Η, Ε διὰ τῶν ΖΗ, ΕΗ, καὶ οὕτως εὑρίσκω τὸ τετράπλευρον ΖΕ, ὅπερ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας ἔχον παραλληλόγραμμον ἐστι (150). δῆλον δὲ, ὅτι ὀρθῆς δοθείσης τῆς γωνίας Γ ὀρθογώνιον ἔσεται ἢ τὸ τετράπλευρον. ἴσων δὲ καὶ τῶν πλευρῶν δοθεισῶν, τετράγωνον ἀποδειχθήσεται.

§192: Κύκλου δοθέντος, ἢ μέρους τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ κέντρον εὑρεῖν. Τρία σημεῖα Α, Β, Γ (σχ:15) τῆς περιφερείας κατ' ἀρέσκειαν τεμὼν, καὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ ἀγαγὼν, διαιρῶ ταύτας εἰς δύο ἴσα μέρη (180) διὰ τῶν καθέτων ΚΗ, ΚΖ, καὶ οὕτως εὑρίσκω τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Κ. ἐξ ἴσου ἀπέχον ἀπὸ τῶν τῆς περιφερείας σημείων Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον κέντρον. διὰ τῆς αὐτῆς δὲ κατασκευῆς καὶ τρίγωνον ἐν κύκλῳ ἐγγέγραπται, ἤτε περιφέρεια διὰ τριῶν σημείων ΑΒΓ διάγεται.

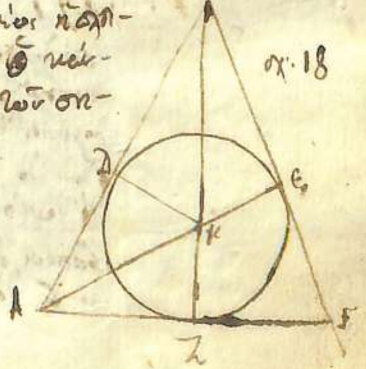


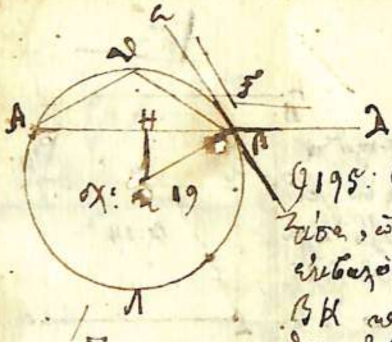
§193: Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α ἐφαπτομένην τοῦ δοθέντος κύκλου ἀγαγεῖν. Ἐὰν τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας δοθῇ (σχ:16), τὸ κέντρον Κ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Α ζεύξας, ἄγω τῇ ΑΚ κάθετον τὴν ΑΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Ἐὰν δὲ τὸ Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου ὑποτεθῇ, (σχ:17) τὸ δοθὲν Α καὶ τὸ κέντρον Κ ὡσαύτως ζεύξας, τὴν ΑΚ κατὰ τὸ Η διχοτομῶ, κέντρῳ δὲ τῷ Η καὶ διαστήματι τῷ ΑΗ τὴν ΑΒΔ περιφέρειαν γράψας, ἄγω τὰς ΑΒ, ΑΔ, αἵτινες εἰσὶ δύο ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α τῷ δοθέντι κύκλῳ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι. καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΚ, ΑΔΚ ἐν ἡμικυκλίοις ἐγγεγραμμέναι εἰσί, ὀρθαὶ τοῖς πέρασι Β, Δ τῶν ἡμιδιαμέτρων εἰσίν, δῆλον, ὅτι τοῦ δοθέντος ΒΔΖ κύκλου ἐφάπτονται (163).



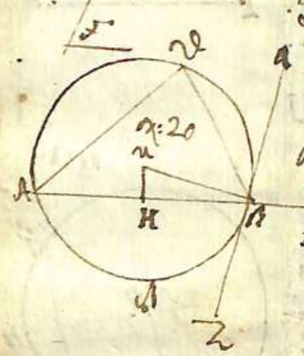


§194: Ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ:18) κύκλον ἐγγράψαι, ἑκατέρων τῶν Α, Β γωνιῶν, διὰ τῶν ΑΚ, ΒΚ διχοτομήσας (184), ἄγω ἀπὸ τοῦ κοινοῦ τούτων σημείου Κ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου τὰς καθέτους ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ (182), καὶ ἐπειδὴ ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΔΚ, ΑΚΖ ἡ γωνία ΔΑΚ = ΖΑΚ ἐστιν, ἡ Δ = Ζ, καὶ ἡ ΑΚΔ = ΑΚΖ ἔσονται, καὶ ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΔΚ = ΖΚ, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ ἡ ΔΚ = ΕΚ. ὅθεν ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΚ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν σημείων ΔΕΖ διερχόμενος, ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἐγγράφεται.





§195: Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ (σχ: 19, 20) τμῆμα κύκλου ὅτε κατασκευάσαι, ὥστε πάσας τὰς ἐν αὐτῷ ἐγγραφομένας γωνίας ἴσας εἶναι τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ϛ, ἐκβαλὼν τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Δ, καὶ τὴν ΔΒΕ = ϛ κατασκευάσας, ἀνάγω τὴν μὲν ΒΚ κάθετον τῇ ΕΖ ἀπὸ τοῦ σημείου Β, τὴν δὲ ΗΚ κάθετον κατὰ τὸ μέσον Η τῆς ΑΒ· αὗται δὲ κατὰ τὸ σημεῖον Κ ἀλλήλαις συναντήσουσι, κέντρῳ λοιπὸν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΚ γράφω κύκλον, οὗ τινος τὸ τμῆμα ΑΘΒ, τὸ ζητούμενον ἄρα, καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ΕΖ κάθετος οὖσα τῷ πέρατι Β τῆς ΚΒ ἡμιδιαμέτρου, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἐστί, δηλονότι ἡ γωνία ΑΒΖ = ΕΒΔ = ϛ, μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΛΒ (177), ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΘΒ τὸ αὐτὸ ἔχει μέτρον (172), ὥστε ΑΘΒ = ϛ ἐστί, δῆλον δὲ ὅτι ὀρθῆς τῆς γωνίας δοθείσης τὸ ζητούμενον τοῦ κύκλου τμῆμα, τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γραφόμενον ἡμικύκλιον ἔσεσθαι.



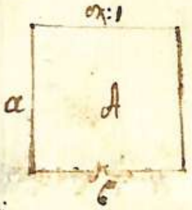
§196: Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τὴν ἀριθμητικήν, εἰ δυνατόν, εὑρεῖν αὐτῶν ἀναφοράν, τὴν μείζονα διὰ τῆς ἐλάσσονος μετρήσας, ταύτην δὲ διὰ τοῦ λειφθέντος, καὶ τοῦτο διὰ τοῦ ἑτέρου λειφθέντος, ὡς ἐν τῇ ἀριθμ:, ὅσα καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ τοῦ μεγίστου διαιρέτου, εὑρήσω, εἰ δυνατόν, λειφθέντων ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἐστι παραβολὰς ἐμπεριεχομένων. τοῦτο δὲ ὡς μονάδα, ἤτε κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἕξω τὴν ζητουμένην αὐτῶν ἀναφοράν. ὁμοίως εὑρήσω καὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναφοράν, εἰ δυνατόν, δύο ὁποιωνδήποτε τόξων, καὶ ἑπομένως δύο ὁποιωνδήποτε γωνιῶν. ὅταν δὲ μετὰ διαφόρων ἐργασίας μηδεὶς εὑρεθῇ κοινὸς διαιρέτης, τότε ὡς ἔγγιστα ἐκ τῶν λειφθέντων ὡς τοιούτων ληφθέντων, ἕξω τὴν ζητουμένην ὡς ἔγγιστα ἀναφοράν.

Βιβλίον Δ^ον Περὶ τινῶν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ἀναφορῶν. Θεωρήματα

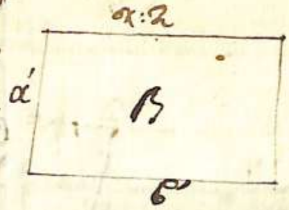
σχ: 1

§197: Πᾶν ὀρθογώνιον, ἤτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὑπὸ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ ὑποσημαίνεσθαι δυνατόν. καθότι τοῦ ὕψους ἐπὶ τῆς βάσεως κινουμένου ὑποτεθέντος, ἐπ' αὐτῆς δηλ: πολλαπλασιαζομένου, δῆλον, ὅτι τότε τὸ ὀρθογώνιον τελεσθήσεται, ἤτε ὑπὸ τῆς ἀξιολόγου ἐπιπέδου ἐπιφανείας περιορισθήσεται ὅταν τὸ ὕψος ἐπὶ ὅλης τῆς βάσεως ληφθῇ, ἐπὶ ὅλης δηλ: ταύτης πολλαπλασιασθῇ. ὅθεν ὀνομασθέντος α τοῦ ὕψους ὁποιουδήποτε ὀρθογωνίου οἷον τοῦ Α (σχ: 1) καὶ β τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἤτε τοῦ μὲν ὕψους ἐξ α γραμμικὰς ἐμπεριέχοντος μονάδας, τῆς δὲ βάσεως ἐξ β τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἔσεται αβ, περιέχει δηλ: αβ ὀρθογωνίδια.

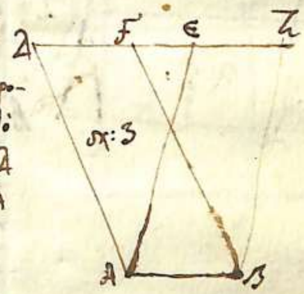
δύο, ἢ ἀπλ:



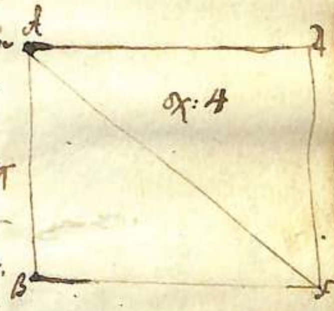
§198 Δύο, ἢ πολλὰ ὀρθογώνια Α, Β, (σχ:1 καὶ σχ:2) πρὸς ἄλληλά εἰσιν ἐν συνημμένῳ λόγῳ τῶν ὕψεων καὶ βάσεων αὐτῶν, ἤτε ὡς τὰ γινόμενα τῶν ὕψεων ἐπὶ τῶν βάσεων· καθότι, ἐπειδὴ καὶ τὸ μὲν Α διὰ τὸ γινόμενον αβ ὑποσημαίνεται, τὸ δὲ Β διὰ τὸ α΄β΄ (197) ἔσεται Α:Β::αβ:α΄β΄. ὅθεν καὶ ἴσων τῶν ὕψεων δοθέντων, ἀποβήσεται Α:Β::β:β΄. ἤτοι: τὰ ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, τούτων δὲ ἴσων δοθεισῶν, γενήσεται Α:Β::α:α΄, ἤτοι: τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα ὀρθογώνια, πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη.



§199: Τὰ ἰσοϋψῆ καὶ ἴσας βάσεις ἔχοντα παραλληλόγραμμα, οἷον τὰ ΑΓ, ΒΕ (σχ:3) ἰσόμετρα ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπειδὴ καὶ ΑΒ = ΓΔ = ΕΖ ἐστὶ (148), κοινῆς τῆς ΓΕ προστεθείσης, ἔσεται ΔΕ = ΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ΑΔ = ΒΓ, καὶ ΑΕ = ΒΖ, ὅθεν καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ = ΒΓΖ ἔσεται. ἀλλὰ τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΖΔ ἀφαιρεθέντος, τὸ ΑΖ μένει παραλληλόγραμμον, τοῦ δευτέρου δὲ ἀφαιρεθέντος, τὸ ΒΔ λείπεται. ὥστε καὶ ΑΖ = ΒΔ ἔσεται.



§200. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ὁποιονδήποτε παραλληλόγραμμον ἰσόμετρον ἐστὶν ἰσοϋψεῖ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἴσην αὐτῷ ἔχοντι βάσιν, ὅθεν καὶ παντὸς παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ, καὶ δύο ἢ πολλὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔσονται, ὡς τὰ γινόμενα τῶν ὕψεων ἐπὶ τῶν βάσεων αὐτῶν, ἐσομένως δὲ ἴσων μὲν τῶν ὕψεων ὄντων πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ἀποβήσονται, ἴσων δὲ τούτων δοθεισῶν, ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη ἔσονται.

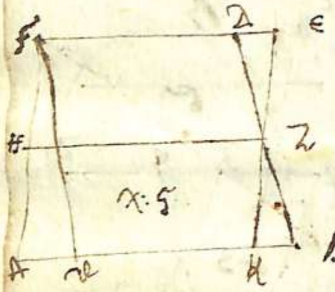


§201: Τὰ τρίγωνα οἷον τὸ ΑΒΓ (σχ:4) τὰ ἴσην βάσιν, καὶ ὕψος ἴσον παραλληλογράμμῳ τινὶ ΒΔ ἔχοντα ὑποδιπλάσια, ἤτε τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἰσιν. ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα, καὶ ἰσογώνια ὄντα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, δῆλον ὅτι τὸ ΑΒΓ ἥμισυ τοῦ ΒΔ ἐστί.

§202: Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ παντὸς τριγώνου τὸ ἥμισυ ἐστὶν ἰσοϋψοῦς ὀρθογωνίου καὶ τὴν αὐτὴν ἔχοντος βάσιν, καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει γινομένῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ, ὥστε ὀνομασθέντος α τοῦ ὕψους, καὶ β τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν ἔσεται $\frac{αβ}{2}$.

§203: Ἕπεται πρὸς τούτοις, ὅτι δύο, ἢ πολλὰ τρίγωνα ἐν συνημμένῳ εἰσὶ λόγῳ τῶν ὕψεων καὶ τῶν βάσεων αὐτῶν, ἤτε ὡς τὰ ἀπὸ τούτων γινόμενα, καὶ ἐσομένως ἴσων μὲν τῶν πρώτων ὄντων τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ἔσονται. ἴσων δὲ τούτων δοθεισῶν, ὡς τὰ ὕψη ἀποβήσονται.

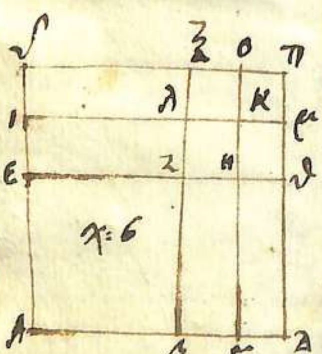
§204. Ἐκ τῶν αὐτῶν δῆλον γίνεται καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα πρὸς τὰ παραλληλόγραμμα ἔσονται, ὡς τὸ ἥμισυ γινόμενον τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ πρὸς τὸ ὅλον γινόμενον τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἐσομένως τῶν τοῦ ὕψους ἴσων ὄντων, τὰ τρίγωνα ἔσονται πρὸς τὰ παραλληλόγραμμα ὡς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως αὐτῶν πρὸς τὴν ὅλην τῶν παραλληλογράμμων, ἴσων δὲ τῶν βάσεων ὑποτεθεισῶν τὰ τρίγωνα πρὸς τὰ παραλληλόγραμμα ἀναφέρονται(?), ὡς τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτῶν πρὸς τὸ ὅλον τοῦ παραλληλογράμμου.



§ 205: Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου οἷον τοῦ ΑΔ (σχ: 5) ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει γινομένῳ τοῦ ὕψους ΓΘ καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ. ἤτοι $\frac{\Gamma\Theta(AB+\Gamma\Delta)}{2}$. ἐπειδὴ καὶ τὸ τραπέζιον εἰς δύο διαιρεῖται τρίγωνα, ὧν τὸ μὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῆς βάσεως ΑΒ ἐπὶ τὸ ὕψος ΓΘ, ἤτοι τῷ $\frac{\Gamma\Theta\cdot AB}{2}$ (202), τὸ δὲ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῆς βάσεως ΓΔ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΘ, ἤτοι $\frac{\Gamma\Theta\cdot\Gamma\Delta}{2}$. δῆλον, ὅτι, ἀμφότερα τὰ τρίγωνα, ἤτοι ὅλον τὸ τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ κ: φ: τοῦ $\frac{\Gamma\Theta\cdot AB}{2}$, $\frac{\Gamma\Theta\cdot\Gamma\Delta}{2}$, ἤτοι τῷ $\frac{\Gamma\Theta\cdot AB+\Gamma\Theta\cdot\Gamma\Delta}{2}=\frac{\Gamma\Theta(AB+\Gamma\Delta)}{2}$. ἀχθῶσι δὲ ἡ μὲν ΕΗ παράλληλος τῇ πλευρᾷ τοῦ τραπεζίου ΑΓ διὰ τοῦ μέσου σημείου Ζ τῆς ΒΔ, ἡ δὲ ΗΖ τῇ ΑΒ, ἐκβληθήσεται δὲ καὶ ἡ ΓΔ μέχρι τοῦ Ε, ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΒΖΚ, ἔχουσι τὴν μὲν ΔΖ = ΖΒ, τὰς δὲ κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας καὶ τὴν ΖΒΚ = ΖΔΕ, ἕξουσι καὶ τὴν ΔΕ = ΚΒ (106), καὶ ἑπομένως ἔσται ΓΔ + ΑΒ = ΓΔ + ΑΚ + ΚΒ = ΓΔ + ΑΚ + ΔΕ = ΓΕ + ΑΚ = 2ΑΚ = 2ΗΖ. ὅθεν καὶ $HZ=\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$ ἐστί. ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ γινομένῳ ΓΘ·ΖΗ, τουτέστι τῷ ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ τῆς τὰ μέσα σημεῖα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν συναπτούσης εὐθείας. ὅθεν ἐὰν ἡ μία μὲν τῶν παραλλήλων πλευρῶν ὀνομασθῇ β, ἡ ἑτέρα δὲ γ, καὶ τὸ ὕψος α, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔσται $\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{2}$. ὀνομασθείσης δὲ δ τῆς τὰ ῥηθέντα σημεῖα συναπτούσης εὐθείας, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔσται αδ.

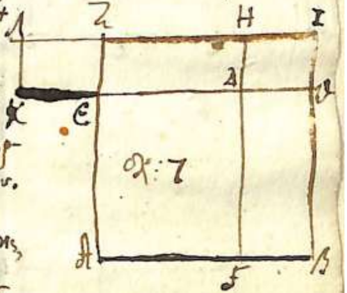
§ 206: Τῶν ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασι τὰ ὕψη ταῖς βάσεσι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. καθότι ὑποτεθέντος τὸ παραλληλόγραμμον Α ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ Β, καὶ α τὸ ὕψος τοῦ πρώτου, καὶ β τὴν βάσιν αὐτοῦ, α΄ δὲ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου, καὶ β΄ τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἕξομεν αβ = α΄β΄ (200) καὶ ἑπομένως α:α΄ :: β΄:β, καὶ β:β΄ :: α΄:α.

§ 207: Διὰ τῶν αὐτῶν δῆλον γίνεται ὅτι, καὶ τῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασι ταῖς βάσεσι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. καθότι ὑποτεθέντος τὸ Α τρίγωνον, φέρ' εἰπεῖν, ἴσον τῷ τριγώνῳ Β, α τὸ ὕψος τοῦ πρώτου, καὶ β τὴν βάσιν αὐτοῦ, α΄ δὲ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου καὶ β΄ τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἕξομεν $\frac{\alpha\beta}{2}=\frac{\alpha'\beta'}{2}$, καὶ αβ = α΄β΄, καὶ ἑπομένως α:α΄ :: β΄:β.



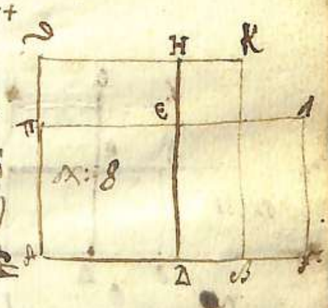
§ 208: Ἐὰν εὐθεῖα (σχ:6) οἷον ΑΔ εἰς δύο, ἢ πολλὰ τμηθῇ τμήματα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ΑΠ, ἴσον ἅμα τοῖς ἀφ' ἑκάστου τμήματος τετραγώνοις, καὶ ἔτι πᾶσι τοῖς ἀπὸ πάντων τῶν τμημάτων ἀνὰ δύο περιεχομένοις(?) διπλοῖς ὀρθογωνίοις. τμηθήσεται καὶ ἡ ΑΝ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ὁμοίως τῇ ΑΔ, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν Β, Γ, Ε, Ι, παράλληλοι ἀχθῶσιν τῶν μὲν ΒΞ, ΓΟ, τῇ ΑΜ, τῶν δὲ ΕΘ, ΙΜ τῇ ΑΔ [illegible] δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὅτι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἐστὶ τετράγωνον, τὸ δὲ ΖΚ τὸ ἀπὸ τοῦ ΒΓ, καὶ τὸ ΚΠ τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΔ. ὡσαύτως δῆλον γίνεται, ὅτι τὰ μὲν ΒΗ, ΕΛ, τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἰσὶν ὀρθογώνια.

τὰ δὲ ΓΘ, ΙΞ, τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, τὰ δὲ ΗΜ, ΛΟ, τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἐς ἐκεῖνα μέρη διῃρημένον ἐστὶν, ἐς 3 δηλ. τετράγωνα, τὰ ἀφ' ἑκάστου τμήματος, καὶ ἐς 6 ὀρθογώνια τὰ ἀπὸ τῶν τμημάτων ἀνὰ δύο λαμβανομένων παραγόμενα. Τὸ θεώρημα τοῦτο ταυτίζεται τῷ προβλήματι τῶν πολυωνύμων τετραγωνισμῷ. καθότι τὸ διώνυμον $\alpha+\beta$ τετραγωνίσαντες, ἔχομεν $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, τὸ τριώνυμον δὲ $\alpha+\beta+\gamma$ ἐς τὴν δευτέραν ὑψώσαντες δύναμιν, εὑρίσκομεν $\alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.



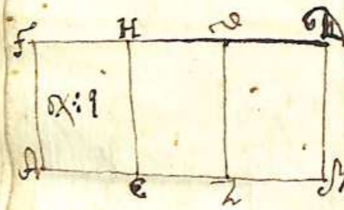
§ 209. Τὸ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς ΑΓ (σχ: 7) δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας ΑΒ τετραγώνῳ, τῷ ΑΙ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἀφαιρετέας ΒΓ, δύο ὀρθογωνίων τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀπὸ τοῦ δύο τούτων τετραγώνων ἀφαιρεθέντων. τουτ. ἔχομεν $(AB-B\Gamma)^2=\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2-2AB\cdot B\Gamma$. Τῆς ΑΕ = ΑΓ ληφθείσης, καὶ διὰ τῶν Γ, Ε ἀχθείσης τῆς μὲν ΓΗ παραλλήλου τῇ ΑΖ, τῆς δὲ ΕΘ τῇ ΑΒ, ἐκβληθείσης δὲ καὶ τῆς πλευρᾶς ΖΙ καθὰ τὴν ΖΛ = ΗΙ, καὶ τοῦ τετραγώνου ΚΖ πληρωθέντος, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς ΑΓ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ τετράγωνον, τὸ δὲ ΚΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὡς ἴσης τῇ ΒΓ = ΗΙ = ΖΛ, ἔσονται δὲ τὸ ΑΙ καὶ ΚΖ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὄντα τετράγωνα. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΑΗ = ΖΙ = ΑΒ, καὶ ΓΗ = ΑΖ = ΑΒ, δῆλον ὅτι τὸ ΗΚ, καὶ ΓΙ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, καὶ ΒΓ ἐστὶν δύο ὀρθογώνια, τούτων δὲ ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος ἤτοι τοῦ κ.φ. τῶν $\overline{AB}^2$, $\overline{B\Gamma}^2$ ἀφαιρεθέντων, μένει τὸ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς ΑΓ τετράγωνον ΑΔ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ταυτίζεται τῷ προβλήματι τετραγωνισμοῦ τοῦ διωνύμου Α−Β, καθότι τοῦτο τετραγωνίσαντες, ἔχομεν ὁμοίως $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Ἐὰν δὲ πολλαὶ ὦσιν αἱ ἀπὸ Α ἀφαιρετέαι εὐθεῖαι, οἷον ἡ Γ, ἡ Δ, τὸ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς αὐτοῦ τετράγωνον, οἷον τὸ $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2$ ἐστίν.

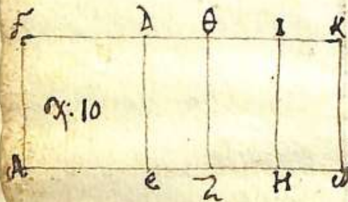


§ 210. Τὸ ὑπὸ τοῦ κεφ: ΑΓ (σχ: 8) καὶ τῆς διαφορᾶς ΑΔ δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ παραγόμενον ὀρθογώνιον τὸ ΑΛ ἴσον ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετραγώνων, ἤτοι τῶν ΑΚ, ΕΚ, ἔχομεν δηλ: $(AB+B\Gamma)(AB-B\Gamma)=\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2$. Τῆς ΑΘ ἴσης ΑΒ ληφθείσης, τῆς δὲ ΑΠ = ΑΔ, καὶ τῆς ΒΓ = ΒΔ, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ΔΗ τῇ ΑΘ παραλλήλου, τῆς δὲ ΠΛ τῇ ΑΒ, τὸ μὲν ΑΚ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστὶ τετράγωνον, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΑΛ τὸ ὑπὸ τῆς ΑΓ καὶ ΑΔ ὀρθογώνιον. τὸ δὲ ὀρθογών: ΗΠ = ΒΛ. ἔσονται δὲ καὶ τὸ ὀρθογών: ΑΛ = ΑΚ − ΕΚ = $\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τὸ θεώρημα τοῦτο ταυτίζεται τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ κ.φ. καὶ τῆς διαφορᾶς δύο ὁποιωνδήποτε ποσῶν· καθότι τὸ $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὸ $\alpha-\beta$ πολλαπλασιάζοντες, εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

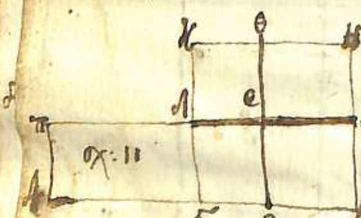
§211: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὦσιν ΑΒ, ΑΓ, (σχ:9) τέμνηται δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν, οἷον ἡ ΑΒ, εἰς δύο, ἢ πολλὰ τυχόντα τμήματα, θατέρας δὲ ἀτμήτου ληφθῇ, τὸ ὑπὸ τῶν δύο περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΔΑ, ἴσον ἔσται πᾶσι τοῖς ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ΑΓ, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις ΑΗ, ΕΘ, ΖΔ, ἐπὶ καθόλου ταῦτα πάντα ὡς μέρη αὐτοῦ ὄντα ὁμοῦ ληφθέντα, ἴσα αὐτῷ ἔσονται. ὅθεν, φέρ' εἰπεῖν, δοθεισῶν τῶν α, β, εὐθειῶν, καὶ τῆς $\alpha=\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$ ἕξομεν $\alpha\beta=\beta\gamma+\beta\delta+\beta\varepsilon+\ldots$, ἐὰν δὲ καὶ $AB=A\Gamma$ ὑποτεθῇ, ἤτοι $\alpha=\beta$ δοθῇ, ἔσται $\alpha^2=\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\ldots$, τ.ἔ. ἐὰν εὐθεῖα εἰς δύο, ἢ πολλὰ τυχόντα τμήματα, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγ: ἴσον ἔσται πᾶσι τοῖς ὀρθογωνίοις, τοῖς ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις.

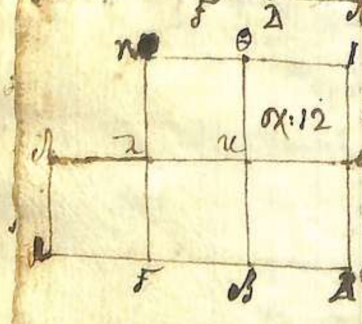


§212: Ἐὰν εὐθεῖα τις ΑΒ (σχ:10) εἰς δύο, ἢ πολλὰ τυχόντα τμήματα τὰ ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΒ, &c., τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων, οἷον τοῦ ΑΕ, ὀρθογώνιον τὸ ΑΚ ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ ῥηθέντος τμήματος τετραγώνῳ ΑΘ, καὶ πᾶσι τοῖς ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τμήματος, καὶ ἑκάστου τῶν λοιπῶν περιεχομένοις ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ, ἐπὶ καθόλου ταῦτα πάντα μέρη τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚ ὄντα, ὁμοῦ ληφθέντα, ἴσα αὐτῷ ἔσονται. ὅθεν φέρ' εἰπεῖν, τῆς εὐθείας $\alpha=\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$ ὑποτεθείσης, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων, οἷον τοῦ β, ὀρθογώνιον $\alpha\beta=\beta^2+\beta\gamma+\beta\delta+\beta\varepsilon+\ldots$ ἔσται.



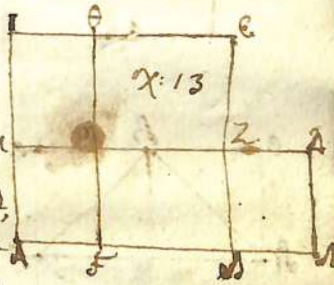
§213: Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:11) τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων ὀρθογ: ΑΕ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν ΓΔ τετραγώνου τοῦ ΛΘ ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ τῷ ΓΗ. καθότι, ἐπειδὴ καὶ $\Delta E=\Delta B$, καὶ $A\Gamma=\Gamma B=BH$, ἔσται καὶ $A\Lambda=\Delta H$, καὶ ἐπομένως $A\Lambda+\Gamma E$, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων ὀρθογώνιον, καὶ τὸ τετράγωνον ΛΘ ἴσα τῷ τετραγώνῳ ΓΗ ἔσονται. οὕτω τμηθείσης τῆς εὐθείας α εἰς ἴσα μὲν τὰ $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, εἰς ἄνισα δὲ τὰ β, γ, ἡ μεταξὺ τῶν τομῶν ἔσται $\frac{\alpha}{2}-\gamma$, ὅθεν καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον $\frac{\alpha^2}{4}-\alpha\gamma+\gamma^2$, τῷ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων ὀρθογωνίῳ βγ προσθέντες, ἕξομεν $\beta\gamma+\frac{\alpha^2}{4}-\alpha\gamma+\gamma^2=\beta\gamma+\frac{\alpha^2}{4}-\gamma(\alpha-\gamma)$, καὶ ἐπειδὴ $\alpha-\gamma=\beta$ ἐστίν, ἀφαιρεθήσεται $\beta\gamma+\frac{\alpha^2}{4}-\gamma(\alpha-\gamma)=\beta\gamma+\frac{\alpha^2}{4}-\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{4}$ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας δοθείσης τετραγώνῳ δηλ.



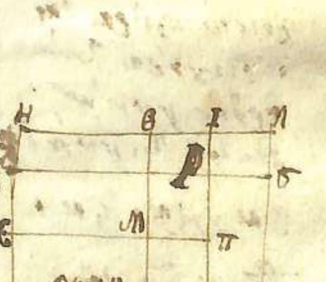


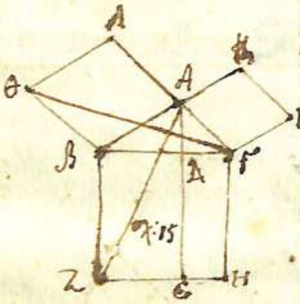
§214: Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:12) τμηθῇ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Γ, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προστεθείσῃ, ἤτοι τῆς ΑΔ ἐπὶ τῇ προστεθείσῃ ΒΔ γινόμενον τὸ ὀρθογ: δηλ: ΑΕ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΑΓ τετραγώνου τοῦ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ τῷ ΓΙ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προστεθείσης. ἐπεὶ γὰρ ΓΖ = ΔΕ = ΒΔ, δηλονότι καὶ ΖΗ = Ζα = ΒΓ ἐστί, ἑπομένως τὸ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΑΓ τετράγωνον ἔσται. ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓ = ΓΒ = ΕΙ, τὸ ΑΖ = κΙ ἐστίν. ὅθεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ μετὰ τοῦ τετραγώνου ΖΘ ἴσον τῷ τετραγώνῳ ΓΙ ἔσται. ἤγουν φέρ᾽ εἰπεῖν τμηθείσης τῆς εὐθείας Α εἰς ἴσα μέρη τὰ $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}$, προστεθείσης δὲ αὐτῇ τῆς εὐθείας β, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προστεθείσης, ἤτοι τῆς $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὴν προστεθεῖσαν β γινόμενον, ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον $\alpha\beta+\beta^2$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγ: $\frac{\alpha^2}{4}$, ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον $\frac{\alpha^2}{4}+\alpha\beta+\beta^2=\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)^2$ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας δηλ: καὶ τῆς προστεθείσης τετραγώνῳ ἔσται.

§215: Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:13) τμηθῇ ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγ: ΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ θατέρου τμήματος τοῦ ΑΓ φέρ᾽ εἰπεῖν, ἤτοι τὸ ΔΛ, ἴσα ἐστὶ δυσὶν ὀρθογωνίοις ἀπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ῥηθέντος τμήματος παραγομένοις, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. καθότι, ἐπειδὴ καὶ ΒΛ = ΑΓ, ἔσται καὶ ΑΒ = ΓΛ, καὶ ἑπομένως τὸ ΓΛ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ τμήματος ΑΓ ὀρθογώνιον ἔσται, ἐπειδὴ δὲ καὶ ΑΙ = ΑΒ, τὸ ΑΘ ὡσαύτως τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ τμήματος ΑΓ ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐπειδὴ πρὸς τούτοις καὶ Αα = ΔΛ = ΒΛ = ΑΓ, ἔσται καὶ κΙ = ΓΒ. καὶ ἑπομένως ΗΕ τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ΓΒ τετραγ:. ὅθεν καὶ ὅλον τὸ σχῆμα ἴσον ἐστὶ δυσὶν ὀρθογ: ἀπὸ τῆς ὅλης εὐθείας, καὶ τοῦ τμήματος ΑΓ παραγομένοις, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ΒΓ τετραγώνῳ, ἤγουν φέρ᾽ εἰπεῖν, τῆς εὐθείας $\alpha=\beta+\gamma$ ὑποτεθείσης, ἔσται $\alpha^2=\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2$. καὶ $\alpha^2+\beta^2=2\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2=2\beta(\beta+\gamma)+\gamma^2=2\alpha\beta+\gamma^2$. ἀντὶ τοῦ $\beta+\gamma$ δηλ: τὸ α ἀντικατασταθέντος.



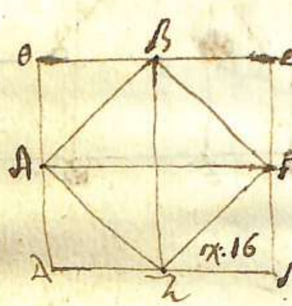
§216: Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:14) τμηθῇ ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ, τέσσαρα ὀρθογώνια ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ, καὶ τοῦ τμήματος ΒΓ παραγόμενα, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ΑΓ τετραγώνου, ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ, καὶ τοῦ ῥηθέντος τμήματος ΒΔ = ΒΓ τετραγώνῳ τῷ ΑΛ. ληφθείσης τῆς ΑΕ = ΑΓ, καὶ τῆς ΑΖ = ΑΒ, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν παραλλήλων ΖΘ, ΕΠ, ΓΘ, ΒΙ, ἔσται τὸ μὲν ΑΜ τὸ ἀπὸ τοῦ τμήματος ΑΓ τετραγ:. τὸ δὲ ΖΙ,





ΕΖ, ΒΘ, ΓΠ + ΡΛ τὰ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ, καὶ τοῦ τμήματος ΒΓ τέσσαρα ὀρθογώνια, ὥστε τὸ τετράγωνον ΑΛ ἴσον ἐστὶ τέσσαρσιν ὀρθογωνίοις τοῖς ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ τμήματος ΒΓ περιεχομένοις, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ΑΓ τετραγώνῳ. Οὕτω φέρ' εἰπεῖν, ὑποτεθείσης τῆς $α=β+γ$, ἔσται $4αβ+γ^2=(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$. καθότι, ἐπεὶ δὴ καὶ $γ=α-β$ ἐστί, τὸ $4αβ+γ^2=4αβ+(α-β)^2=4αβ+α^2-2αβ+β^2=α^2+2αβ+β^2=(α+β)^2$ ἔσται.

§217: Τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ (σχ:15) παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, οἷον τοῦ ΑΒΓ τετράγωνον τὸ ΖΓ ἰσοδύναμόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνοις ΑΘ, ΑΙ. καταχθείσης τῆς καθέτου ΑΔΕ, καὶ τῶν ΓΘ, ΑΖ ἐπιζευχθεισῶν, τὸ τρίγωνον ΑΒΖ = ΒΓΘ ἔσται· καθότι ἡ μὲν ΒΓ = ΒΖ ἐστίν, ἡ δὲ ΒΘ = ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΖ = ΓΒΘ. διότι ἑκατέρα τούτων ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, καὶ τῆς κοινῆς ΑΒΓ συντίθεται. ἀλλὰ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΖ τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν ΒΖ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τῷ ὀρθογωνίῳ ΖΔ ἥμισυ αὐτοῦ ἐστί, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΘ τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν ΒΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τῷ τετραγώνῳ ΑΘ ἥμισυ αὐτοῦ ἐστίν, ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΖΔ ἴσον τῷ τετραγώνῳ ΑΘ ἔσται. ὁμοίως ἀποδειχθήσεται καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΕ ἴσον τῷ τετραγώνῳ ΑΙ. ὅθεν καὶ τὸ τετράγωνον ΖΓ = ΒΛ + ΓΚ ἔσται, ὅπερ, φέρ' εἰπεῖν ὑποτεθείσης α τῆς ὑποτεινούσης, καὶ β, γ τῶν λοιπῶν πλευρῶν, ἔχομεν $α^2=β^2+γ^2$.



§218: Ἐπεὶ δὴ καὶ $α^2=β^2+γ^2$, ἔσται καὶ $β^2=α^2-γ^2$, καὶ $γ^2=α^2-β^2$, τουτέστι: τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετραγώνῳ, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς τετραγώνου.

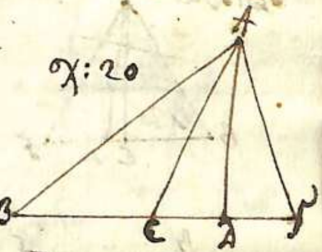
§219: Ὡσαύτως ἐπεὶ δὴ καὶ $α^2=β^2+γ^2$ ὑποτεθέντος $β=γ$, τουτέστι: τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ἴσων δοθεισῶν, ἔσται $α^2=2β^2$. καὶ ἐπομένως $α^2:β^2::2:1$ καὶ $α:β::\sqrt{2}:1$ δηλ. τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ (σχ:16) τετράγωνον τὸ ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνου τοῦ ΒΖ, ἡ δὲ διαγώνιος ΑΓ ὁποιουδήποτε τετραγώνου τοῦ ΒΖ ἔχουσα πρὸς ἑκατέραν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ὡς $\sqrt{2}:1$ ἀσύμμετρος ὡς πρὸς αὐτήν ἐστιν.

Ἀριθμητικὴ ἀνάλογον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς τὰς περιεχούσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν πάντως τρίγωνα εἰσὶ 3α, 4α, 5α.

$5α^2=3α^2+4α^2$

§220: Ἐπεὶ δὴ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΘ ἰσοδύναμόν ἐστι τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΕ (σχ:15) τὸ δὲ ΒΗ πρὸς τὸ ΒΕ ὀρθογώνιον ἔχει ὡς ΒΓ πρὸς ΒΔ (198), δηλονότι, καὶ ΒΗ:ΑΘ ἤτοι $ΒΓ^2:ΑΒ^2::ΒΓ:ΒΔ$ ἔσται, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ

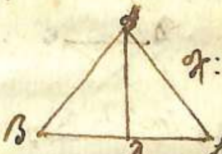
$\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΑΓ}^2 :: ΒΓ : ΓΔ$ ἀποδείσεται, τ. ἔ. τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον ἔσεται πρὸς τὸ ἀπὸ [illegible] τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσηγμένον τῇ πλευρᾷ τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης, τὸ ὑπὸ τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῇ ὑποτεινούσῃ καταγομένης διατεμνόμενον.

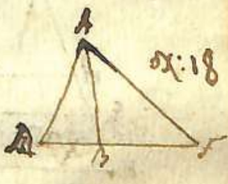


§ 221: Ἐπεὶ δὴ καὶ τὰ ὑπὸ ... ὀρθογώνια ΒΕ, ΔΗ πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΒΔ, ΔΓ διότι ὅτι καὶ τὰ τοῖς ἰσοϋψῆ ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις, καὶ ἐπομένως ἕξομεν $ΑΘ : ΑΙ$, ἤτοι $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΓ}^2 :: ΒΔ : ΓΔ$. τ. ἔ. τὰ τετράγωνα τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ προσηγμένα ταῖς πλευραῖς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τὰ ὑπὸ τῆς ῥηθείσης καθέτου διατεμνόμενα.

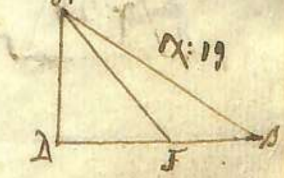
§ 222: Ἐπεὶ δὴ καὶ $ΑΘ = ΒΕ$ (σχ: 15) καὶ $ΑΙ = ΔΗ$, ἤτοι ἐπειδὴ καὶ $\overline{ΑΒ}^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$, καὶ $\overline{ΑΓ}^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$, ὥστε καὶ $ΒΓ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΔ$, καὶ $ΒΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΔ$. τ. ἔ. αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, μέσαι ἀνάλογοί εἰσι, τῆς τε διαγωνίου καὶ τοῦ προσηγμένου αὐταῖς τμήματος τοῦ ὑπὸ τῆς καθέτου διατεμνομένου.

§ 223: Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ: 17, 18) καταχθείσης ἀπὸ τῆς Α γωνίας τῇ βάσει ΒΓ τῆς καθέτου ΑΔ, τὸ ἀπὸ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς ΑΒ ὀξείᾳ τινὶ γωνίᾳ τῇ Γ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ καθ' ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ, τετραγώνων, δὶς ἀφαιρεθέντος τοῦ ὀρθογωνίου $ΒΓ \cdot ΓΔ$. καθότι τῆς καθέτου ΑΔ ἐντὸς τοῦ τριγώνου πιπτούσης (σχ: 17), λαμβάνομεν $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ$, καὶ ἐπομένως $\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$ (209), κοινοῦ δὲ τοῦ ΑΔ τετραγώνου προστεθέντος, εὑρίσκομεν $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$, ἤτοι $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$. (217), ἐκτὸς δὲ τοῦ τριγώνου τῆς καθέτου ΑΔ πιπτούσης (σχ: 18), λαμβάνομεν $ΒΔ = ΓΔ - ΒΓ$, καὶ ἐπομένως $\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$, κοινοῦ δὲ τοῦ $\overline{ΑΔ}^2$ προστεθέντος, εὑρίσκομεν $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$. ἤτοι $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΔ$.



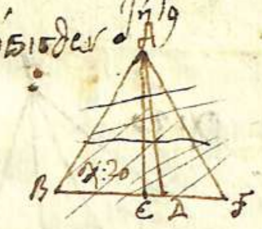


§ 224: Ἐν παντὶ ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ: 19) τὸ ἀπὸ τῆς ἀντικειμένης ΑΒ τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ Γ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ κ. φ. τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ τετραγώνων, σὺν δὲ καταχθείσης τῆς καθέτου ΑΔ, καὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὀρθογωνίου $ΒΓ \cdot ΓΔ$. καθότι, ἐπειδὴ καὶ $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ$, ἕξομεν $\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + 2ΒΓ \cdot ΓΔ$. (208) κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ $\overline{ΑΔ}^2$ εὑρήσομεν $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + 2ΒΓ \cdot ΓΔ$, ἤτοι $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + 2ΒΓ \cdot ΓΔ$. (217).

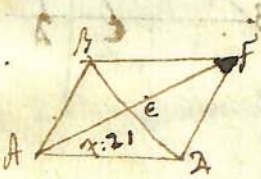


Ὥστε ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ ἀπὸ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς γωνίᾳ τινὶ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ... τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, ἀφαιρεθέντος δὶς τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ... ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου κάθετος ... τὸ συνημμένον ... ἐὰν ἡ γωνία ... ἀμβλεῖα ... δοθῇ.

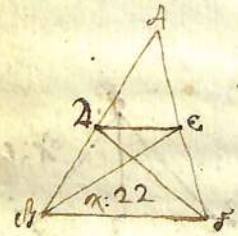
ὄπισθεν



§225: Ἐν παντὶ τριγώνου τῆς ΑΕ (σχ: 20) ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ μέσον Ε τῆς βάσεως ΒΓ ἀχθείσης, ἔσονται $\overline{AB}^2 + \overline{AΓ}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$. καθότι τῆς καθέτου ΑΔ καταχθείσης, ἔχομεν $\overline{AΓ}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ΓE}^2 - 2ΓE \cdot ΔE$ (223)· καὶ $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + 2BE \cdot ΔE$ (224)· καὶ ἐπομένως $\overline{AB}^2 + \overline{AΓ}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + 2BE \cdot ΔE + \overline{AE}^2 + \overline{ΓE}^2 - 2ΓE \cdot ΔE$· καὶ ΒΕ=ΓΕ τεθείσης ἀντὶ τοῦ ἑτέρου ἀντικαταστάθέντος, εὑρίσκομεν $\overline{AB}^2 + \overline{AΓ}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{ΓE}^2$.

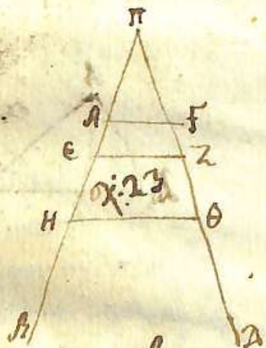


§226: Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ ΒΔ (σχ: 21) τὸ κ.φ. τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετραγώνων ἰσοδύναμον ἐστὶ τῷ κ.φ. τῶν ἀπὸ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ· καθότι ἐπειδὴ καὶ ΑΕ=ΓΕ, καὶ ΒΕ=ΔΕ (152)· καὶ $\overline{AB}^2 + \overline{BΓ}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$, καὶ $\overline{AΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{ΔE}^2$ (225), ἔχομεν καὶ $\overline{AB}^2 + \overline{BΓ}^2 + \overline{AΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2 + 2\overline{AE}^2 + 2\overline{ΔE}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BE}^2$, ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $4\overline{AE}^2$ τὸ ἀπὸ τῆς 2ΑΕ, ἤτε τῆς ΑΓ τετράγωνον, τὸ δὲ $4\overline{BE}^2$ τὸ ἀπὸ τῆς 2ΒΕ, ἤτε τῆς ΒΔ, ἄρα τὸ κ.φ. τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετραγώνων ἰσοδύναμον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν διαγωνίων τετραγώνοις.

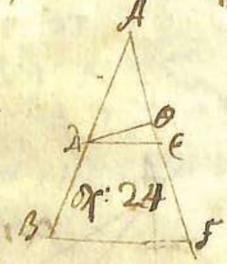


§227: Εὐθεῖα τις ἡ ΔΕ (σχ: 22) παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ βάσει ΒΓ τριγώνου τινὸς τοῦ ΑΒΓ, τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀναλόγως, ἤτοι ἔσται ΑΔ:ΒΔ::ΑΕ:ΓΕ· καθότι ἀχθεισῶν τῶν ΒΕ, ΓΔ, ἔχομεν ΑΔΕ:ΒΔΕ::ΑΔ:ΒΔ, καὶ ΑΔΕ:ΓΔΕ::ΑΕ:ΓΕ (203)· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ, ἰσοϋψῆ ὄντα, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΔΕ κείμενα, ἰσοδύναμά εἰσιν, ἄρα ὁ πρῶτος λόγος τῶν εἰρημένων ἀναλογιῶν ταὐτίζεται, ἐπομένως δὲ καὶ ὁ δεύτερος ταὐτίζεται· ὅθεν εὑρίσκομεν ΑΔ:ΒΔ::ΑΕ:ΓΕ

§228: Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας διάφοροι ἐξάγονται ἀναλογίαι, αἳ ἐξισώσεις τὰς πρὸς ἀλλήλας ἀναφορὰς τῶν ὅλως τεμνομένων γραμμῶν τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὑποδηλοῦσιν, οἷον, φέρ' εἰπεῖν, ἔχομεν ΑΔ:ΑΕ::ΒΔ:ΓΕ, καὶ ΑΔ·ΓΕ=ΑΕ·ΒΔ. καὶ ΑΔ+ΒΔ:ΑΔ::ΑΕ+ΓΕ:ΑΕ, ἤτε ΑΒ:ΑΔ::ΑΓ:ΑΕ, καὶ ΑΔ+ΒΔ:ΒΔ::ΑΕ+ΓΕ:ΓΕ, ἤτε ΑΒ:ΒΔ::ΑΓ:ΓΕ, καὶ ΑΒ·ΑΕ=ΑΔ·ΑΓ, καὶ ΑΒ·ΓΕ=ΑΓ·ΒΔ.



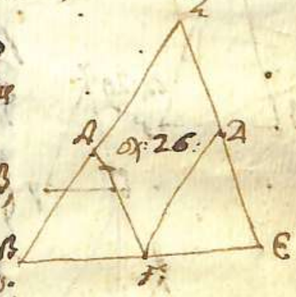
§229: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (σχ: 23) ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν τῶν ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ κ.τ.λ. τέμνωνται, τὰ τμήματα ΑΕ, ΓΖ, ΕΗ, ΖΘ κ.τ.λ. ἀνάλογα ἔσονται· καθότι ἐκβληθεισῶν τῶν εὐθειῶν μέχρι τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου Π, ἔχομεν ΕΠ:ΖΠ::ΕΗ:ΖΘ, ἀλλὰ καὶ ΕΠ:ΖΠ::ΕΑ:ΓΖ (228), ἄρα ἔσονται καὶ ΑΕ:ΓΖ::ΕΗ:ΖΘ.



§230: Εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ (σχ: 24) ἀναλόγως τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τριγώνου τινὸς τέμνουσα, παράλληλος ἐστὶ τῇ αὐτοῦ βάσει ΒΓ, εἰ δὲ μή, ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ οὕτως ἔχομεν ΑΔ:ΒΔ::ΑΘ:ΓΘ (227), ἀλλὰ καὶ ΑΔ:ΒΔ::ΑΕ:ΓΕ ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα ἔσται ΑΘ:ΓΘ::ΑΕ:ΓΕ, ἤτε ΑΘ:ΑΕ::ΓΘ:ΓΕ, τὸ ὅλον δηλ. ἔλασσον τοῦ ἰδίου μέρους, ὅπερ ἀδύνατον.

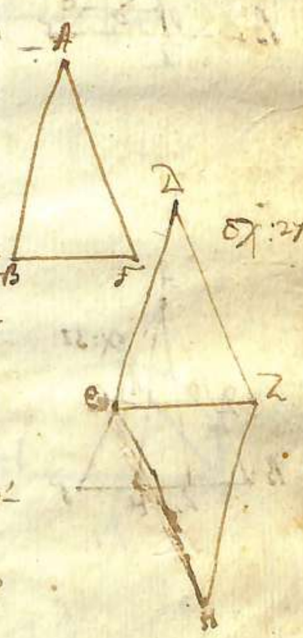
§231: Εὐθεῖα δὲ ἡ ΑΔ (σχ: 25) τὴν γωνίαν ΒΑΓ τριγώνου τινὸς διχοτομοῦσα, τέμνει καὶ τὴν αὐτῇ κειμένην πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ, ΓΔ, ταῖς προσκειμέναις αὐτοῖς πλευραῖς ἀνάλογον, ἔστι δηλ: ΒΔ: ΓΔ :: ΑΒ: ΑΓ. Διὰ τὸ Γ τῆς ΕΓ ἀχθείσης παραλλήλου τῇ ΑΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐκβληθείσης μέχρι τοῦ Ε, τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἰσοσκελὲς ἔστι· καθότι ἡ γωνία ΓΑΔ = ΑΓΕ ἐστιν, ἡ δὲ ΑΕΓ = ΒΑΔ· καὶ ἑπομένως ΑΕ = ΑΓ, ἔτι δὲ καὶ ΒΔ: ΓΔ :: ΑΒ: ΑΕ (227) ὥστε ἔσται καὶ ΒΔ: ΓΔ :: ΑΒ: ΑΓ.

§232: Δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ (σχ: 26) ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα, ἔχοντα δηλ: τὴν μὲν γωνίαν Α = Δ, τὴν δὲ Β = ΔΓΕ, καὶ τὴν ΑΓΒ = Ε, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς, ἤτοι τὰς ὁσαύτως ὡς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας κειμένας, ἀνάλογον, ἔστι δηλ: ΒΓ: ΓΕ :: ΑΒ: ΓΔ :: ΑΓ: ΔΕ. Τεθείσης τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΕ, ἐκβληθεισῶν δὲ καὶ τῶν ΑΒ, ΔΕ, μέχρι τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου Ζ, ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία Β = ΔΓΕ ἐστι, καὶ ἡ ΑΓΒ = ΖΕΒ, ἔσται ἡ μὲν ΖΒ τῇ ΓΔ παράλληλος. ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΕ, καὶ ἑπομένως τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον· δηλ: ἡ μὲν ΑΓ = ΔΖ, ἡ δὲ ΓΔ = ΑΖ. Ὅθεν ἕξομεν ΒΓ: ΓΕ :: ΑΒ: ΑΖ, ἤτοι ΓΔ· καὶ ΒΓ: ΓΕ :: ΖΔ: ἤτοι ΑΓ: ΔΕ. ὥστε ἔσται ΒΓ: ΓΕ :: ΑΒ: ΓΔ :: ΑΓ: ΔΕ.



§233: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι καὶ δύο τρίγωνα δύο μόνας γωνίας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχοντα, ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα, ἕξουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· παρατηρητέον δὲ ὅτι αὗται εἰσὶ ἴσαις ἀντικείμεναι γωνίαις, ὅθεν καὶ τούτων γνωστῶν ὄντων, ῥᾳδίως ἡ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀρμόσοντες ἀναλογίας.

§234: Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, (σχ: 27) τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους ἔχοντα, ἀλλήλοις ἰσογώνια καὶ ὅμοιά εἰσι, κατασκευασθείσης τῆς γωνίας ΖΕΗ = Β, καὶ ΕΖΗ = Γ, ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ Α = Η. καὶ ἑπομένως ἕξομεν ΒΓ: ΕΖ :: ΑΒ: ΕΗ (233), ἀλλὰ καὶ ΒΓ: ΕΖ :: ΑΒ: ΕΔ ἐξ ὑποθέσεως, ὥστε ἔσται ΑΒ: ΕΗ :: ΑΒ: ΔΕ. τουτ. ΕΗ = ΔΕ, ὁμοίως ἐπειδὴ καὶ ΒΓ: ΕΖ :: ΑΓ: ΖΗ, καὶ ΒΓ: ΕΖ :: ΑΓ: ΔΖ, ἔσται καὶ ΑΓ: ΖΗ :: ΑΓ: ΔΖ. τουτ. ΖΗ = ΔΖ.

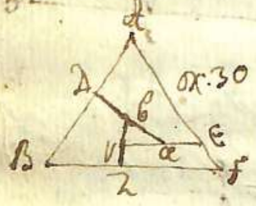


Ὅθεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἰσόπλευρον τῷ ΕΖΗ ὑπάρχον, ἰσογώνιον αὐτῷ ἔσται, ἀλλὰ τοῦτο ἰσογώνιον καὶ τῷ ΑΒΓ ἐστίν· ὥστε τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἰσογώνια ἀλλήλοις, καὶ ἑπομένως ὅμοιά εἰσιν.

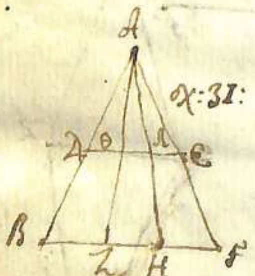
§235. Ἐκ τούτου ἔσεται ὅτι τὰ τρίγωνα ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα ἢ ἀνάλογον τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἔχοντα, ὅμοια ὑπάρχουσι.

§236. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, (σχ:28) μίαν τινὰ γωνίαν τὴν Α=Δ ἔχοντα, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀνάλογον, ἤτοι ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ ὅμοια ἔσονται. Τῆς ΑΗ=ΔΕ ληφθείσης, καὶ τῆς ΗΘ τῇ βάσει ΒΓ παραλλήλου ἀχθείσης, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΗΘ ἔσεται. καὶ ἑπομένως ἕξομεν ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ, ἀλλὰ καὶ ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ ὥστε ἔσεται καὶ ΑΗ:ΔΕ::ΑΘ:ΔΖ, ἀλλὰ ΑΗ=ΔΕ· ὅθεν καὶ ΑΘ=ΔΖ ἔσεται. καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΗΘ=ΔΕΖ. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ὅμοιον τῷ ΑΒΓ ἐστίν, ὥστε καὶ τὸ δεύτερον ὅμοιον αὐτῷ ἔσεται.

§237. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ (σχ.29) τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους ἔχοντα, ὅμοια ἔσονται. καθότι τῆς μὲν ΑΒ πλευρᾶς παραλλήλου τῇ αβ ὑποτεθείσης, τῆς δὲ ΒΓ τῇ βγ, καὶ τῆς ΑΓ τῇ αγ ἔσεται καὶ ἡ γωνία Α=α, ἡ Β=β, καὶ ἡ Γ=γ (137). καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα ὅμοια ἔσονται (232).



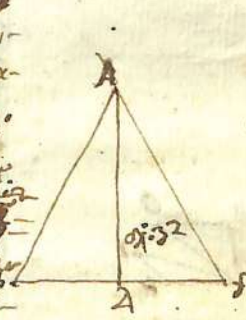
§238. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ (σχ:30) τὰς πλευρὰς καθέτους ἀλλήλαις ἔχοντα ὅμοιά εἰσι, τοῦ τετραπλεύρου Β,β, αἱ μὲν Δ, Ζ, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, αἱ δὲ Β, β δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔβΖ, αβγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν, ὥστε κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ΔβΖ, μένει ἡ Β=αβγ. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ ἡ Α=βαγ, καὶ ἡ Γ=αγβ. ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ, ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα ὅμοιά εἰσι. παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐν μὲν τῷ θεωρήματι (237) αἱ παράλληλοι πλευραί εἰσι καὶ ὁμόλογοι, ἐνταῦθα δὲ αἱ ἀλλήλαις κάθετοι. ὅθεν καὶ τούτων γνωσθεισῶν, εὐχερῶς αἱ διὰ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀριθμήσονται ἀναλογίαι.



§239. Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (σχ:31) τριγώνου τινὸς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ, ΑΓ, τέμνουσι καὶ τὴν βάσιν ΒΓ, καὶ τὴν αὐτῇ παράλληλον ΔΕ εἰς ἀνάλογα τμήματα, τουτέστιν ἔσονται ΔΘ:ΒΖ::ΘΛ:ΖΗ::ΕΛ:ΗΓ::&c καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔΕ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΒΓ, τὸ μὲν τρίγωνον ΑΔΘ ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΑΒΖ, τὸ δὲ ΑΘΛ τῷ ΑΖΗ, τὸ ΑΛΕ τῷ ΑΓΗ, &c.

ὅθεν ἕξομεν ΑΘ : ΑΖ :: ΔΘ : ΒΖ. (232), ἀλλὰ ΑΘ : ΑΖ :: ΘΛ : ΖΗ
καὶ ΘΛ : ΖΗ :: ΑΛ : ΑΗ, καὶ ΑΛ : ΑΗ :: ΛΕ : ΗΓ, ὥστε ἕξομεν καὶ ΔΘ :
ΒΖ :: ΘΛ : ΖΗ :: ΕΛ : ΓΗ :: κτλ. ὅθεν ἑκατέρας τῶν ΔΕ, ΒΓ παραλλή-
λων εἰς ἴσα τεμνομένης τμήματα, καὶ ἡ ἑτέρα εἰς ἴσα τμηθήσεται.

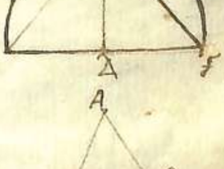
§ 240: Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ὀρθογωνίου τριγώνου, (σχ: 32) ἐπὶ τὴν ὑποτεί-
νουσαν ΒΓ, κάθετος ἡ ΑΔ ἀχθῇ, τέμνει αὐτὸ εἰς τὰ παρακείμενα τρίγωνα
καὶ τῷ ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά ἐστι. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν τῆς καθέτου τεμα-
μένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτου τετραγώνῳ, ἤγουν ἡ κάθετος
μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων ἀποδειχθήσεται. Ἐπειδὴ καὶ ἐν τοῖς τρι-
γώνοις ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἡ μὲν γωνία Β κοινή ἐστιν, ἡ δὲ Α, καὶ Δ
ὀρθαί, ἔσεται καὶ ἡ ΒΑΔ = Γ, καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα ἀλλήλοις
ἰσογώνια ὄντα, ὅμοια ἔσονται. ὡσαύτως καὶ τὸ ΑΓΔ ὅμοιον τῷ ὅλῳ ΑΒΓ
ἀποδειχθήσεται, καὶ ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ ὅμοια τῷ ὅλῳ ὄντα τρι-
γώνῳ, καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά εἰσι, ὅθεν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς πα-
ραλαμβάνοντες, εὑρίσκομεν ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΓΔ. καὶ $\overline{ΑΔ}^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ$.



§ 241. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ, καὶ ΓΔ : ΑΓ :: ΑΓ :
ΒΓ. καὶ ἐπομένως $\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$, καὶ $\overline{ΑΓ}^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ$, καὶ $\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 =$
$ΒΔ \cdot ΒΓ + ΓΔ \cdot ΒΓ = \overline{ΒΓ}^2$, ὡς καὶ κατὰ τὸν (217) ἐδείξαμεν. ὅθεν
μανθάνομεν, ὅτι καὶ τὸ θεώρημα τοῦτο συνέπεια ἐστὶ τῆς τῶν ὁμο-
λόγων πλευρῶν ἀναλογίας τῶν ἀλλήλοις ἰσογωνίων τριγώνων,
ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁποιονδήποτε σχῆμα εἰς τρίγωνα διαιρεῖσθαι δύναται, καὶ
ἐπειδὴ ὅλη σχεδὸν τῶν τριγώνων ἡ θεωρία ἀπὸ τοῦ 232 ἐξηρτη-
ται θεωρήματος, δῆλον, ὅτι ὅλη ἡ γεωμετρία σχεδὸν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπιστηρίζεται
θεώρημα.

§ 242: Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Α τῆς περιφερείας (σχ: 33) εἰς τὰ πέρα-
τα τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΑΓ, καταχθῇ δὲ καὶ ἡ
κάθετος ΑΔ τῆς Α γωνίας ὀρθῆς οὔσης, ἕξομεν $\overline{ΑΔ}^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ$ (240)
$\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$, $\overline{ΑΓ}^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ$.

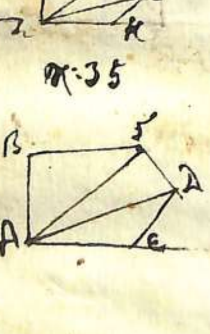
§ 243: Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ (σχ: 34) μίαν τινὰ γωνίαν τὴν Α
φέρ' εἰπεῖν, ἴσην ἔχοντα, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ
τῶν περιεχουσῶν τὴν ἴσην γωνίαν πλευρῶν περιεχόμενα κτλ. ἕξομεν,
ΑΒΓ : ΑΔΕ :: ΑΒ · ΑΓ : ΑΔ · ΑΕ. καθότι ἀχθείσης τῆς ΒΕ τὰ ἰσοϋ-
ψῆ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΕ πρὸς ἄλληλα ἔσονται, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν
ΑΒ, ΑΔ. ἔσεται δηλ. ΑΒΕ : ΑΔΕ :: ΑΒ : ΑΔ. ὡσαύτως καὶ τὰ



ἴσου ὕψους τριγ. ΑΒΓ, ΑΒΕ, εὑρήσομεν ΑΒΓ : ΑΒΕ :: ΑΓ : ΑΕ. ὅθεν καὶ δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν πολλαπλασιάζοντες, λαμβάνομεν ΑΒΓ·ΑΒΕ : ΑΒΕ·ΑΔΕ :: ΑΒ·ΑΓ : ΑΔ·ΑΕ· ἤτοι ΑΒΓ : ΑΔΕ :: ΑΒ·ΑΓ : ΑΔ·ΑΕ.

§ 244: Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ἰσοδύναμά ἐστιν, ὅταν τὰ τοιαῦτα γινόμενα ἴσα ὑπάρχωσιν, ὅταν δηλ. ΑΒ·ΑΓ = ΑΔ·ΑΕ, ἤγουν ὅταν ΑΒ : ΑΔ :: ΑΕ : ΑΓ δοθῇ.

§ 245: Δύο τρίγωνα ὅμοια ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ: 28) πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἤτοι: ἔχομεν ΑΒΓ : ΔΕΖ :: $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$ :: $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΔΕ}^2$ :: $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΕΖ}^2$. Ἐπειδὴ καὶ Α = Δ, καὶ Β = Ε, ἔχομεν ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΑΒ·ΑΓ : ΔΕ·ΔΖ, καὶ ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ, ταύτην δὲ τὴν ἀναλογίαν ἐπὶ τὴν ΑΓ : ΔΖ :: ΑΓ : ΔΖ πολλαπλασιάσαντες, εὑρήσομεν ΑΒ·ΑΓ : ΔΖ·ΔΕ :: $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$. καὶ ἑπομένως ἔχομεν ΑΒΓ : ΔΕΖ :: $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$, ἀλλὰ ΑΓ : ΔΖ :: ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ, καὶ $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$ :: $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΔΕ}^2$ :: $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΕΖ}^2$, ὥστε ἕπεται καὶ ΑΒΓ : ΔΕΖ :: $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$ :: $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΔΕ}^2$ :: $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΕΖ}^2$.



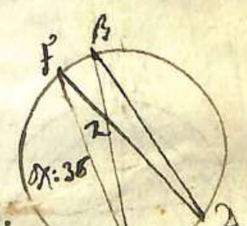
§ 246: Δύο πολύγωνα ὅμοια τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ (σχ: 35) ἀπὸ ἰσαρίθμων τριγώνων ἀλλήλοις ὁμοίων, καὶ ὁμοίως κειμένων, συντίθενται. Ἀχθεισῶν τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΙ, ἐπειδὴ καὶ Β = Η, καὶ ΑΒ : ΗΖ :: ΒΓ : ΗΘ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἕπεται καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον τῷ ΖΗΘ· (236), καὶ ἡ ΑΓΒ = ΖΘΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ Γ = Θ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ὥστε καὶ ἡ ΑΓΔ = ΖΘΙ ἕπεται. ἐπεὶ δὲ καὶ ΒΓ : ΗΘ :: ΑΓ : ΖΘ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ΒΓ : ΗΘ :: ΓΔ : ΘΙ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ὥστε ἕπεται καὶ ΑΓ : ΖΘ :: ΓΔ : ΘΙ, καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ὅμοιον τῷ ΖΘΙ. (236). ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθήσεται καὶ τὸ ΑΔΕ ὅμοιον τῷ ΖΙΚ.

§ 247: Ἐκ τοῦ ἐναντίου δύο πολύγωνα ἐξ ὁμοίων, καὶ ὁμοίως κειμένων τριγώνων συντιθέμενα, ὅμοια ἀλλήλοις ἔσονται. καθότι ἡ γωνία Β = Η ἐστί, ἡ Γ = Θ, ἡ Δ = Ι, ἡ Ε = Κ, κτλ. ὡς ἐξ ἴσων γωνιῶν συγκείμενα. ἔτι δὲ καὶ ΑΒ : ΖΗ :: ΒΓ : ΗΘ :: ΑΓ : ΖΘ :: ΓΔ : ΘΙ :: κτλ, ὥστε τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα ἀλλήλοις ἰσογώνια ὄντα, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀνάλογους ἔχοντα, ὅμοια ἔσονται.

§ 248: Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων πρὸς ἀλλήλας ῶσιν, ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί, αἱ δὲ ἀπ' αὐτῶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τετράγωνα. Ἔστω δὴ ὡς $ΑΒ:ΖΗ :: ΒΓ:ΗΘ :: ΓΔ:ΘΙ :: ΔΕ:ΙΚ ::$ κτλ, ἔσται ὡς $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+$ κτλ $: ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+$ κτλ $:: ΑΒ:ΖΗ :: ΒΓ:ΗΘ ::$ κτλ, ἤτε ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΔ ἔστι πρὸς τὴν τοῦ ΖΙ ὡς δύο ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί, ἔστι δὲ ὡς $ΑΒΓ :: ΖΗΘ :: \overline{ΑΓ}^2:\overline{ΖΘ}^2$ (245), ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΑΓ}^2:\overline{ΖΘ}^2 :: ΑΓΔ:ΖΘΙ$ ὡς $\overline{ΑΓ}^2:\overline{ΖΘ}^2 :: \overline{ΑΔ}^2:\overline{ΖΙ}^2$, ὡς $\overline{ΑΔ}^2:\overline{ΖΙ}^2 :: ΑΔΕ:ΖΙΚ$, ὥστε ἔσται ὡς $ΑΒΓ:ΖΗΘ :: ΑΓΔ:ΖΘΙ :: ΑΔΕ:ΖΙΚ$, ὡς ἑπομένως $ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ : ΖΗΘ+ΖΘΙ+ΖΙΚ :: ΑΒΓ:ΖΗΘ :: \overline{ΑΒ}^2:\overline{ΖΗ}^2$. τ.ἔ. τὸ πολύγωνον ΑΔ ἔστι πρὸς τὸ ΖΙ ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

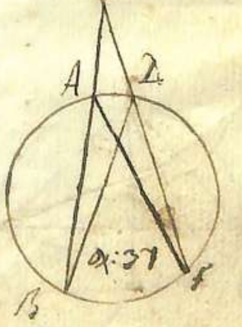
§249: Τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν κατασκευαζόμενα, ἰσοδύναμα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζομένῳ ὁμοίῳ αὐτοῖς πολυγώνῳ. καθότι ἐπειδὴ ὡς τὰ τοιαῦτα πολύγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ δὲ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον ἰσοδύναμον ἐδείχθη τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνοις (241), δῆλον ὅτι ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης πολύγωνον ἰσοδύναμον ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ὁμοίοις αὐτῷ πολυγώνοις.

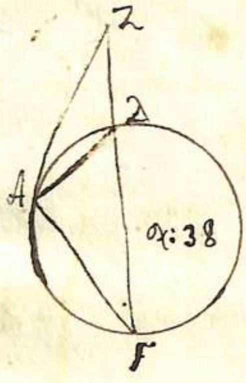
§250: Τὰ τμήματα τῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν χορδῶν, ΑΒ, ΓΔ (σχ:36) πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως ἀνάλογα ἔσονται, τ.ἔ. ἕξομεν $ΑΖ:ΔΖ :: ΓΖ:ΒΖ$· ἀχθεισῶν τῶν ΑΓ, ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΒΔΖ, ὡς ἔχοντα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, τὴν δὲ $Γ=Β$, ὡς τὴν $Α=Δ$ ὡς ἐπὶ τὸ αὐτὸ βεβηκυίας τόξον, ἀλλήλοις ἰσογώνια ἔσονται. ὅθεν ὡς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀνάλογον ἕξουσι, καὶ ἑπομένως ἁρμόσομεν $ΑΖ:ΔΖ :: ΓΖ:ΒΖ$ (232).



§251: Ὅθεν ἔσται ὡς $ΑΖ·ΒΖ = ΓΖ·ΔΖ$. τ.ἔ. τὸ ἀπὸ τῶν τμημάτων θατέρας τῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν χορδῶν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑτέρας.

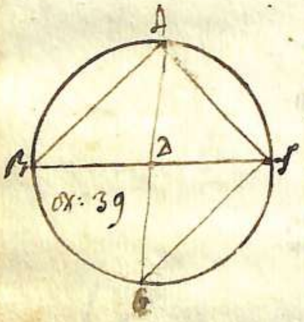
§252: Αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ (σχ:37), ἐκτὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος, ἀγόμεναι τέμνουσαι ΒΖ, ΓΖ ἀντιπεπονθότως ἀνάλογοί εἰσι τοῖς ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήμασιν αὐτῶν, τ.ἔ. ἔσται $ΒΖ:ΓΖ :: ΔΖ:ΑΖ$. ἀχθεισῶν τῶν ΑΓ, ΒΔ τὰ τρίγωνα ΒΔΖ, ΑΓΖ τὴν Ζ γωνίαν κοινὴν ἔχοντα, τὴν $Β=Γ$ ὡς ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ κύκλου τμήματι γεγραμ-



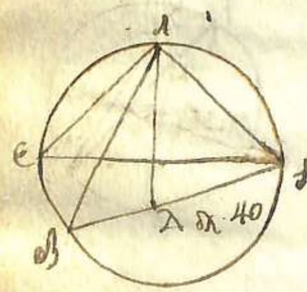


φέρειας, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ = ΒΑΖ· καὶ ἑπομένως διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων εὑρήσομεν $ΒΖ : ΓΖ :: ΑΖ : ΑΖ$· καὶ $ΒΖ \cdot ΑΖ = ΓΖ \cdot ΑΖ$.

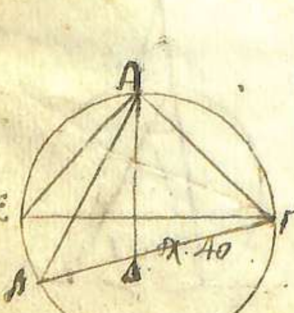
§253 Ἀπό τινος σημείου Ζ (σχ: 38) ἐκτὸς κύκλου ληφθέντος τῆς τεμνούσης ΓΖ, καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΖ ἀχθείσης, ἔσεται $ΓΖ : ΑΖ :: ΑΖ : ΔΖ$, καὶ $\overline{ΑΖ}^2 = ΓΖ \cdot ΔΖ$· τουτ: ἡ ἐφαπτομένη μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήματος αὐτῆς, ἤγουν τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον ἰσότιμον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἀπὸ τῆς τεμνούσης, καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήματος αὐτῆς παραγομένῳ. ἀχθεισῶν τῶν ΑΔ, ΑΓ τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΑΔΖ, τὴν Ζ γωνίαν κοινὴν ἔχοντα, καὶ τὴν ΔΑΖ = Γ ὡς ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ μετρουμένας (171), ἔστι καὶ τὴν ΓΑΖ = ΑΔΖ, καὶ ἑπομένως ἔσεται $ΓΖ : ΑΖ :: ΑΖ : ΔΖ$, καὶ $\overline{ΑΖ}^2 = ΓΖ \cdot ΔΖ$·



§254: Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ: 39), ἐὰν ἡ γωνία Α διὰ τῆς ΑΔ διχοτομηθῇ, τὸ ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν διχοτομηθεῖσαν γωνίαν Α πλευρῶν ὀρθογώνιον $ΑΒ \cdot ΑΓ$ ἰσότιμον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τμημάτων ὀρθογωνίῳ $ΒΔ \cdot ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, τοῦ κύκλου ΑΒΕΓ γραφέντος, καὶ τῆς ΓΕ ἀχθείσης, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχον τὴν γωνίαν Β = Ε, τὴν ΒΑΔ = ΓΑΕ, ἔστι καὶ τὴν ΑΔΒ = ΑΓΕ, καὶ ἑπομένως ἰσογώνιον τῷ ΑΕΓ ὑπάρχον, ὅμοιον αὐτῷ ἐστι· ὅθεν ἔξομεν $ΑΒ : ΑΕ :: ΑΔ : ΑΓ$, καὶ $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΕ \cdot ΑΔ$· ἐστὶ δὲ $ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ$, ὥστε ἔσεται $ΑΒ \cdot ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \cdot ΔΕ$, ἐστὶ δὲ καὶ $ΑΔ \cdot ΔΕ = ΒΔ \cdot ΓΔ$ (251), ὅθεν ἔξομεν $ΑΒ \cdot ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΒΔ \cdot ΓΔ$.

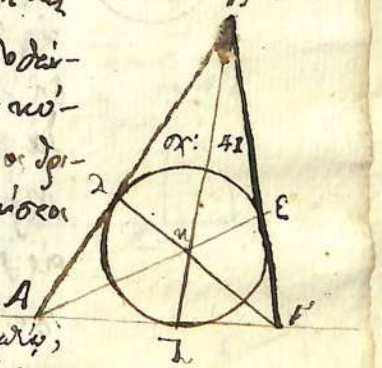


§255: Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ: 40) τὸ ἀπὸ δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ὀρθογώνιον τὸ $ΑΒ \cdot ΑΓ$, ἰσότιμόν ἐστι τῷ ὀρθογωνίῳ $ΓΕ \cdot ΑΔ$, τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου δηλ: ΓΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ τῆς καθέτου τῆς ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτου, ἀπὸ τῆς περιεχομένης γωνίας Α παραγομένης. Τῆς ΑΕ ἀχθείσης, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχον τὴν Β = Ε, τὴν Δ = ΓΑΕ, ἔστι καὶ τὴν ΒΑΔ = ΑΓΕ, καὶ ἑπομένως ἰσογώνιον τῷ ΑΓΕ ὑπάρχον, ὅμοιον αὐτῷ ἔσεται· ὅθεν ἔξομεν $ΑΒ : ΓΕ :: ΑΔ : ΑΓ$, καὶ $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΓΕ$·

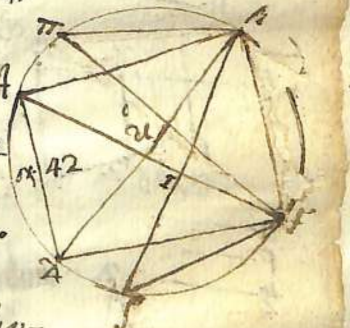


§256. Πολλαπλασιάσαντες δὲ τὰ μέλη τῆς ἐξ. συνεχοῦς ἐπὶ τὴν ΒΓ, εὑρήσομεν $ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ΒΓ = ΓΕ \cdot ΑΔ \cdot ΒΓ = \frac{2ΓΕ \cdot ΑΔ \cdot ΒΓ}{2}$. τουτ: τὸ ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς γινόμενον, ἰσότιμον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τῇ διπλασίᾳ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθείσῃ.

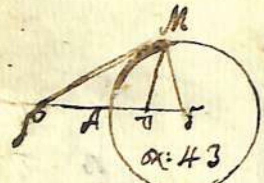
§257: Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ: 41) ἰσότιμόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ, ἐπὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου γινομένῳ. Ἔστω δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΓΚ, ΑΓΚ βάσεις ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου, ὕψος δὲ τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· δῆλον, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν, ἤτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τριγώνου ἰσότιμον τῷ ἀπὸ τὴν περιμέτρου τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τῷ ἡμίσει τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου γινομένῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι



§258: Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ (σχ: 42) ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ, τὸ ἀπὸ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ὀρθογώνιον ἰσότιμον ἐστὶ τῷ κ.φ. τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν ὀρθογωνίων, ἤγουν δηλ: $A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma$. Τοῦ τόξου $\Gamma P = A\Delta$ ληφθέντος, καὶ τῆς ΒΡ ἀχθείσης, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχον τὴν $AB\Delta = \Gamma BI$, τὴν $A\Delta B = B\Gamma I$, ὅμοιον τῷ ΒΓΙ ἔσεται, καὶ ἑπομένως εὑρήσομεν $A\Delta : \Gamma I :: B\Delta : B\Gamma$, καὶ $A\Delta \cdot B\Gamma = \Gamma I \cdot B\Delta$. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΑΒΙ, ἔχον τὴν $ABI = \Gamma B\Delta$, τὴν $BAI = B\Delta\Gamma$ ὅμοιον τῷ ΒΓΔ ἔσεται· ὅθεν λαμβάνομεν $AB : B\Delta :: AI : \Gamma\Delta$, καὶ $AB \cdot \Gamma\Delta = B\Delta \cdot AI$, ταύτας δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ τάξιν προσθέντες, ἕξομεν $A\Delta \cdot B\Gamma + AB \cdot \Gamma\Delta = B\Delta \cdot \Gamma I + B\Delta \cdot AI = B\Delta \cdot A\Gamma$.



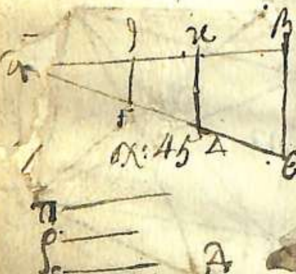
§259: Παντὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, (σχ: 42) ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου αἱ διαγώνιοι πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς τὰ κ.φ. τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπὸ τῶν προσκειμένων ταῖς πέρασιν αὐτῶν πλευρῶν· ἔσεται δηλ: $B\Delta : A\Gamma :: AB \cdot B\Gamma + A\Delta \cdot \Gamma\Delta : AB \cdot A\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$. Καθότι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΓΙ, ἕξομεν $B\Delta : B\Gamma :: AB : BI$, καὶ $B\Delta \cdot BI = B\Gamma \cdot AB$, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΙΡ ὅμοιον ἐστὶ τῷ ΑΒΙ, καὶ ἑπομένως τῷ ΒΓΔ, εὑρήσομεν $B\Delta : \Gamma P :: \Gamma\Delta : IP$, καὶ $B\Delta \cdot IP = \Gamma P \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot \Gamma\Delta$, ταύτας δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ τάξιν προσθέντες, λαμβάνομεν $B\Delta \cdot BI + B\Delta \cdot IP = B\Delta \cdot BP = B\Gamma \cdot AB + A\Delta \cdot \Gamma\Delta$, ληφθέντος δὲ καὶ τοῦ $B\Pi = A\Delta$, ἔσεται διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν $A\Gamma \cdot \Gamma\Pi = AB \cdot A\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, καὶ ἑπομένως παραθήσεται $B\Delta \cdot BP : A\Gamma \cdot \Gamma\Pi :: B\Gamma \cdot AB + A\Delta \cdot \Gamma\Delta : AB \cdot A\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, ἀλλὰ $BP = \Gamma\Pi$, καθότι καὶ τὸ τόξον $\Gamma B\Pi = B\Gamma P$ ἐστίν, ὥστε ἔσεται $B\Delta : A\Gamma :: B\Gamma \cdot AB + A\Delta \cdot \Gamma\Delta : AB \cdot A\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

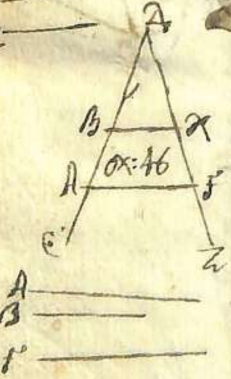


§260: Ἐὰν ἐπὶ μὲν τῆς ἡμιδιαμέτρου $A\Gamma$ (σχ:43) τὸ σημεῖον π ληφθῇ, ἐπ' αὐτῆς δὲ ἐκβληθείσης τὸ σημεῖον ρ οὕτως ληφθῇ, ὥστε εἶναι $\Gamma\pi : A\Gamma :: A\Gamma : \Gamma\rho$, ληφθέντος σημείου τινὸς M ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἰς τῶν $M\pi$, $M\rho$ ἀχθεισῶν, ἔσται $M\pi : M\rho :: A\pi : A\rho$, ἐπειδὴ γὰρ $\Gamma\pi : A\Gamma :: A\Gamma : \Gamma\rho$, ἤτοι $\Gamma\pi : \Gamma M :: \Gamma M : \Gamma\rho$. τὰ τ. ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\Gamma M\pi$, $\Gamma M\rho$, ὅμοιά εἰσιν (236), ἔσται εἰς $M\pi : M\rho :: \Gamma\pi : \Gamma M :: \Gamma\pi : \Gamma A$, ἀλλ' ἐκ τῆς $\Gamma\pi : \Gamma A :: \Gamma A : \Gamma\rho$ ἐξάγεται εἰς $\Gamma\pi : \Gamma A :: \Gamma A - \Gamma\pi : \Gamma\rho - \Gamma A$, ἤτοι $\Gamma\pi : \Gamma A :: A\pi : A\rho$, ὥστε ἔσται εἰς $M\pi : M\rho :: A\pi : A\rho$.

Προβλήματά τινα περὶ τῶν προκειμένων θεωρημάτων: ἐπιλύόμενα

§261: Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB (σχ:44) εἰς ὁσοσδήποτε ἴσα τμήματα, ἢ εἰς ὁσοσδήποτε τμήματα ταῖς δοθείσαις εὐθείαις π, ρ, Σ, ω (σχ:45) ἀνάλογα τεμεῖν, ἀπὸ τοῦ πέρατος A (σχ:44) τῆς AH ὡς ἔτυχεν ἀχθείσης, εἰς τῆς $A\Gamma$ ἐπὶ τῆς AH τοσάκις ληφθείσης, ὅσα εἰσὶ τὰ ζητούμενα ἴσα τμήματα, ἀχθείσης δὲ εἰς τῆς HB, ἤτοι τῶν περάτων τῆς τε AB, εἰς τοῦ τελευταίου τῆς AH τμήματος ἐπιζευχθέντων, ἀχθεισῶν δὲ εἰς παραλλήλων τῇ BH τῶν ΓI, $\Delta\kappa$, $\epsilon\lambda$, ω ἡ AB διὰ τούτων εἰς ἴσα ἀλλήλοις τμηθήσεται τμήματα· καθότι, ἐπειδὴ εἰς $A\Gamma : AI :: \Gamma\Delta : I\kappa :: \Delta\epsilon : \kappa\lambda :: \omega$ (229). ἐπεὶ δὲ $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta\epsilon = \omega$. ὥστε ἔσται εἰς $AI = I\kappa = \kappa\lambda = \omega$. Ληφθείσης δὲ τῆς μὲν $A\Gamma = \pi$ (σχ:45) τῆς δὲ $\Gamma\Delta = \rho$, τῆς $\Delta\epsilon = \Sigma$, ω, εἰς τῶν περάτων ϵ, B, διὰ τῆς $B\epsilon$ ἐπιζευχθέντων, ἀχθεισῶν δὲ εἰς τῇ $B\epsilon$ παραλλήλων τῶν ΓI, $\Delta\kappa$, ω, διὰ τούτων ἡ AB εἰς τὰ ζητούμενα τμηθήσεται τμήματα· καθότι ἔσται $A\Gamma : AI :: \Gamma\Delta : I\kappa :: \omega$



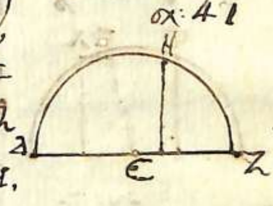


§262: Τετάρτην ἀνάλογον ταῖς δοθείσαις εὐθείαις A, B, Γ (σχ:46) εὑρεῖν. Τῶν $\Sigma\epsilon$, ΔZ ὡς ἔτυχεν ἀχθεισῶν, εἰς ληφθείσης τῆς

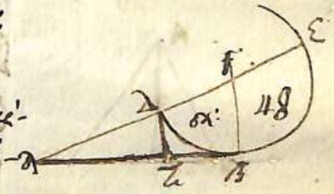
ἐπὶ $A\Delta$

μὲν ΑΔ = Α, τῆς δὲ ΒΔ = Β, καὶ τῆς ΓΔ = Γ, ἐπιζευχθέν-
των δὲ τῶν σημείων Α, Γ διὰ τῆς ΑΓ, τῆς δὲ ΒΧ παραλλή-
λου ταύτῃ ἀχθείσης, ἡ ΔΧ ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος ἔσεται·
καθότι ἔχομεν ΑΔ : ΒΔ :: ΓΔ : ΔΧ (232). ὡσαύτως δὲ καὶ τρί-
τη ἀνάλογος δυσὶν δοθείσαις εὐθείαις εὑρεθήσεται.

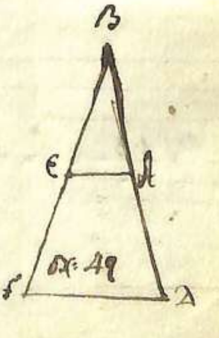
§ 263. Μέσην ἀνάλογον ταῖς δοθείσαις εὐθείαις Α, Β (σχ: 47) εὑρεῖν. ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ΔΖ, ληφθείσης τῆς μὲν ΔΕ = Α, τῆς δὲ ΕΖ = Β, γραφθείσης δὲ καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΔΗΖ ὡς ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΔΖ, ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἀναχθεῖσα κάθετος ΕΗ, ἡ ζητουμένη ἔσται ἀνάλογος. καθότι εὑρήσομεν ΔΕ : ΕΗ :: ΕΗ : ΕΖ (242)



§ 264. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ: 48) καθ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν, εἰς δύο δηλ: τοιαῦτα τμήματα, ὥστε τὸ μέγιστον μέσον εἶναι ἀνάλογον τῇ τε ὅλῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ ἐλάσσονι τμήματι. ὑψωθείσης τῆς καθέτου ΒΓ = τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ ἐπὶ τοῦ πέρατος αὐτῆς Β, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῇ ΒΓ, τῆς περιφερείας ΔΒΕ γραφθείσης, καὶ τῆς τεμνούσης ΑΓΕ ἀχθείσης, ληφθείσης δὲ καὶ τῆς ΑΖ = ΑΔ, ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον κατὰ τὸν ζητούμενον τμηθήσεται λόγον. καθότι ἔχομεν ΑΕ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΔ (253), καὶ ΑΕ − ΑΒ : ΑΒ :: ΑΒ − ΑΔ : ΑΔ, καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ΑΔ = ΑΖ, ἔσεται καὶ ΑΖ : ΑΒ :: ΖΒ : ΑΖ, ἤγουν ΑΒ : ΑΖ :: ΑΖ : ΖΒ. παρατηρητέον δὲ ὅτι καὶ ἡ τέμνουσα ΑΕ καθ' ἄκρον καὶ μέσον τέμνεται λόγον κατὰ τὸ Δ σημεῖον· καθότι εἰς τὴν ἀναλογίαν ΑΕ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΔ, ἀντὶ τῆς ΑΒ τὴν ἴσην αὐτῇ ΔΕ ἀντικαταστήσαντες, εὑρήσομεν ΑΕ : ΔΕ :: ΔΕ : ΑΔ.

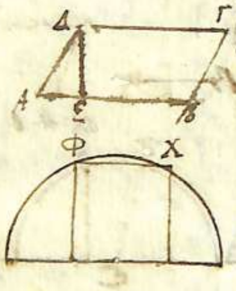


§ 265. Διὰ τοῦ σημείου Α (σχ: 49) ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΓΔ ληφθέντος, εὐθεῖαν τινα τὴν ΒΔ οὕτως ἀγαγεῖν, ὥστε εἰς δύο ἴσα τέμνεσθαι κατὰ τὸ Α σημεῖον. τῆς ΑΕ τῇ ΓΔ ἀχθείσης παραλλήλου, ληφθείσης δὲ καὶ τῆς ΒΕ ἴσης ΓΕ, ἡ τὰ σημεῖα Β, Α ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα καὶ μέχρι τοῦ Δ ἐκβαλλομένη ΒΔ,

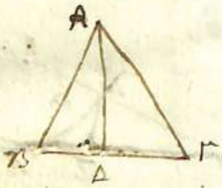


ἡ ζητουμένη ἔσεται, καθότι ἔχομεν $ΑΒ : ΒΕ :: ΑΔ : ΓΕ$ (232) ἀλλὰ $ΒΕ = ΓΕ$. ὥστε καὶ $ΑΒ = ΑΔ$ ἔσεται.

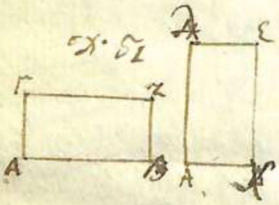
§266: Τετράγωνον τὸ $\overline{φχ}^2$ κατασκευάσαι τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ $ΑΓ$ (σχ: 50), ἢ τῷ τριγώνῳ $ΑΒΓ$ ἰσόδυμον. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον ὑπάρχῃ, εὑρεθείσης μέσης ἀναλόγου τῆς $φχ$ (263) τῇ τε βάσει αὐτοῦ $ΑΒ$, καὶ τῷ ὕψει $ΔΕ$ τὸ ἀπὸ τῆς $φχ$ τετράγωνον τὸ ζητούμενον ἔσται, καθότι ἔχομεν $ΑΒ : φχ :: φχ : ΔΕ$. καὶ $ΑΒ \cdot ΔΕ = \overline{φχ}^2$, ἐὰν δὲ τρίγωνον δοθῇ, εὑρεθείσης μέσης ἀναλόγου τῆς $φχ$ τῇ βάσει $ΒΓ$, καὶ τῷ ἡμίσει ὕψει $\frac{ΑΔ}{2}$, ἢ τῇ ἡμισείᾳ βάσει καὶ τῷ ὕψει $ΑΔ$, τὸ ἀπὸ τῆς $φχ$ τετράγωνον τὸ ζητούμενον ἔσται. καθότι εὑρήσομεν $ΒΓ : φχ :: φχ : \frac{ΑΔ}{2}$, καὶ $\frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \overline{φχ}^2$.



σχ· 50

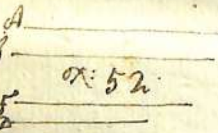


§267: Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας $ΑΔ$ (σχ: 51) ὀρθογώνιον κατασκευάσαι τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ $ΑΖ$ ἰσόδυμον. Εὑρεθείσης τετάρτης ἀναλόγου τῆς $Αχ$ ταῖς δοθείσαις $ΑΔ$, $ΑΒ$, $ΑΓ$ (262), τὸ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $Αχ$, παραγόμενον ὀρθογώνιον τὸ $ΑΕ$ τὸ ζητούμενον ἔσται. καθότι ἔχομεν $ΑΔ : ΑΒ :: ΑΓ : Αχ$, καὶ ἑπομένως $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot Αχ$.



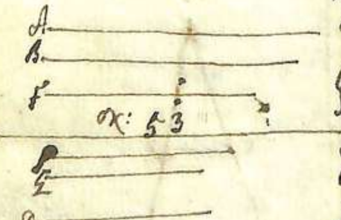
σχ· 51

§268: Τὴν ἀναφορὰν, ἣν ἔχει τὸ ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν $Α$, $Β$, (σχ: 52) ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν $Γ$, $Δ$ δι' εὐθειῶν δηλῶσαι. Εὑρεθείσης τῆς $φ$ τετάρτης ἀναλόγου ταῖς $Β$, $Γ$, $Δ$, ἡ τῶν $Α$, $φ$ ἀναφορὰ ἡ ζητουμένη ἔσται. καθότι ἐπειδὴ καὶ $Β : Γ :: Δ : φ$ ἔσεται καὶ $Β \cdot φ = Γ \cdot Δ$ καὶ ἑπομένως $Α \cdot Β : Γ \cdot Δ :: Α \cdot Β : Β \cdot φ :: Α : φ$, εὑρεθείσης δὲ τῆς $φ$ τρίτης ἀναλόγου ταῖς $Α$, $Γ$, ἡ ἀναφορὰ τῶν ἀπὸ τούτων τετραγώνων ἡ αὐτὴ τῇ $Α : φ$ ἔσται. καθότι ἔχομεν $Α : Γ :: Γ : φ$, καὶ $Α \cdot φ = \overline{Γ}^2$. καὶ ἑπομένως $\overline{Α}^2 : \overline{Γ}^2 :: \overline{Α}^2 : Α \cdot φ :: Α : φ$.



σχ: 52

§269: Τὴν ἀναφορὰν, ἣν ἔχει τὸ ἐκ τῶν εὐθειῶν $ΑΒΓ$ (σχ: 53) πρὸς τὸ ἐκ τῶν $π$, $ρ$, $σ$, γινόμενον δι' εὐθειῶν δηλῶσαι. Εὑρεθείσης $φ$ τετάρτης ἀναλόγου ταῖς $π$, $Α$, $Β$ (262), τῆς δὲ $χ$ ταῖς $Γ$, $ρ$, $σ$, ἡ ζητουμένη ἀναφορὰ ἔσεται ἡ τῶν $φ$, $χ$. καθότι ἐπειδὴ καὶ $π : Α :: Β : φ$, ἔσεται καὶ $Α \cdot Β = π \cdot φ$. καὶ $Α \cdot Β \cdot Γ = Γ \cdot π \cdot φ$. ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ $Γ : ρ :: σ : χ$, εὑρεθήσεται καὶ $ρ \cdot σ = Γ \cdot χ$, καὶ $π \cdot ρ \cdot σ = Γ \cdot π \cdot χ$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν $Α \cdot Β \cdot Γ : π \cdot ρ \cdot σ :: Γ \cdot π \cdot φ : Γ \cdot π \cdot χ :: φ : χ$.



σχ: 53

§270: Τὸ δοθὲν πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$ (σχ: 54) εἰς τρίγωνον ἰσόδυμον αὐτῷ μεταβαλεῖν. Διὰ τῶν $Δ$, $Β$ παραλλήλων ταῖς $ΓΕ$, $ΑΓ$ τῶν $ΔΖ$, $ΒΗ$, ἀχθεισῶν

Τοῦ πρώτου μέρους τῆς Ποσοτικῆς κεφ. Α

§1 Τὰ τῆς Ἀριθμητικῆς μετὰ προσοχῆς παρατηροῦντες θεωρήματα καὶ προβλήματα, μανθάνομεν ὅτι οὐ μόνον εἰς τοῦτον, ἢ ἐκεῖνον προσδιάζουσι τὸν ἀριθμόν, ἀλλ' ὅτι καὶ εἰς ὁποιονδήποτε προσαρμόζονται ἄθροισμα μονάδων. μανθάνομεν δηλ. ὅτι τὰ πάθη, αἱ ἰδιότητες, αἱ ἀναφοραί, τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν ἀριθμῶν γενικώτερον θεωροῦνται, καὶ εἰς τὸν ἀδιόριστον ἀριθμόν, ἤτοι εἰς τὸ ποσὸν ἐν γένει προσεφαρμόζονται. ἡ τοιαύτη λοιπὸν τοῦ ποσοῦ θεωρία ἤτοι ἡ ἐν γένει περὶ αὐτοῦ διαλαμβάνουσα ἐπιστήμη, καὶ τὰ διάφορα αὐτοῦ πάθη ἰδιότητας καὶ ἀναφορὰς θεωροῦσα, Ποσοτικὴ γενικώτερον προσηγορεύθη, ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς λαβοῦσα τὴν ἀρχήν. —

§2: Πρῶτος ὡς φαίνεται ὁ τὴν τοιαύτην ἀπὸ τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὴν Ποσοτικὴν ἐπινοήσας μετάβασιν, ὁ τὰ ἀριθμητικὰ δηλ. θεωρήματα, καὶ προβλήματα γενικώτερον θεωρήσας, καὶ ἐπιλύσας, ἤτοι ὁ διὰ τῶν ἀλφαβητικῶν γραμμάτων τὰ θεωρούμενα, καὶ ζητούμενα γενικώτερον ὑποσημειώσας, Διόφαντος ὑπῆρξεν ὁ περὶ 365 κατὰ τὴν Ἀλεξάνδρειαν ἀκμάσας, ὃν καί τινες πολλοὺς μὲν τῶν πρὸ αὐτοῦ τὸ τοιοῦτον πεποιηκέναι νομίζουσι, πρῶτον δὲ τοῦτον περὶ τῆς τοιαύτης ὑποθέσεως συγγεγραφέναι ὑπολαμβάνουσι, μετὰ δὲ τὸν Διόφαντον οὐ μόνον Ἕλληνες, ἀλλὰ καὶ τῶν Ἀράβων οὐκ ὀλίγοι ἐξ αὐτῶν λαβόντες τὰς ἀφορμάς, καὶ εἰς τὴν τοιαύτην ἐνασχοληθέντες ἐπιστήμην, οὐ μικρὸν αὐτὴν εἰς τὸ πρόσω προήγαγον, μετὰ δὲ τούτους ἄνδρες τῶν ἐν Δύσει ἐπὶ μαθήσει περιβόητοι τὴν τοῦ ποσοῦ σοφίαν ἐπὶ πολὺ ἐπεπόλησαν, καὶ τὴν σήμερον δὲ οἱ πλεῖστοι τῶν μαθηματικῶν ὑπὲρ πάντα σπεύδοντες τῶν κατ' αὐτὴν τὰ μὲν ἐπαύξοντες, τὰ δὲ καὶ ἀκριβέστερα ὄντα διασαφηνίζοντες.

§3: Ἡ Ποσοτικὴ διαφέρει τῆς Ἀριθμητικῆς, οὐ μόνον καθότι, ὅσα ἐκείνη εἰς αὐτὴν διδάσκει, ἐν γένει θεωρεῖ, ἀλλὰ καὶ καθότι διὰ τῶν γενικῶν αὐτῆς ἐργασιῶν ἐπιλύειν δύναται, ὅσα τὴν Ἀριθμητικὴν προχωρῆσαι ἀδύνατον. ὅθεν δῆλον γίνεται, ὅτι κατὰ τὰς ποσοτικὰς ἐργασίας ἀνάγκη ἐστίν, ἵνα καὶ ἄλλοι τινὲς ληφθῶσι χαρακτῆρες παρὰ τοὺς ἀριθμούς, ἤτοι ποσὰ ἐν γένει ὑποσημαίνοντες, καὶ ὡς τοιοῦτοι λοιπὸν πρῶτον μὲν τὰ ἀρχικὰ τῶν ζητημάτων, ἢ θεωρημάτων, ἐλήφθησαν γράμματα. ὕστερον δὲ τὰ τοῦ ἀλφαβήτου γε[νικώ]τερον ἐν χρήσει ἐγένοντο, οἷα ὅταν κατὰ τὴν ποσοτικήν, ἢ γράφοντες, ἢ λέγοντες, α, β, γ, δ, τὰ ποσὰ ἐννοοῦμεν ἀδιόριστα, καθ' ἀρέσκειαν δὲ ὁρισθῆναι δυνάμενα, κατὰ τὸ προκείμενον δηλ. θεώρημα, ἢ πρόβλημα.

§4 Τὰ ποσὰ διαφόρως θεωρούμενα διάφορον ἐδέξαντο καὶ εἰς τὴν ποσοτικὴν διαίρεσιν. ὅτι, φέρ' εἰπεῖν, ἐὰν τὰ ποσὰ ὡς ἄθροισμα μονάδων θεωρηθῶσι ὁρισθῶσι, τότε τῶν καθ' αὐτὰ ὑπολογισμῶν ἡ γενικὴ θεωρία, καὶ ἡ τῶν ἀναφορῶν αὐτῶν ἔργονα, τὸ ὑπολογιστικὸν τῆς ποσοτικῆς συμπλοκῆς μέρος, ἐὰν δὲ ὡς γνωστὰ καὶ ἄγνωστα διακριθῶσιν, ἤτε ὡς ζητούμενα, καὶ διδόμενα, ἡ περὶ εὑρέσεως τῶν ἀγνώστων ἔργονα, ἤτοι ἡ περὶ λύσεως τῶν προβληθέντων θεωρία, τὸ λυτικὸν, ἢ ἀναλυτικὸν τῆς ποσοτικῆς συνίστησι μέρος, ὡσαύτως ἐὰν τὰ ποσὰ ὡς μεταβλητὰ, καὶ ἀμετάβλητα ἐξετασθῶσιν, ἄλλα τῆς ποσοτικῆς παρεκβλήσονται μέρη, ἀλλὰ περὶ τούτων ἐν δικαίῳ τόπῳ λεχθήσεται.

§5: Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ διαφόρους ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ἀναφορὰς μείζονος, ἴσου καὶ ἐλάσσονος, διὰ τοῦτο καὶ τὰ σημεῖα $>$, $=$, $<$ ἐν χρήσει μάλιστα κατὰ τὴν ποσοτικὴν ἔσονται.

§6: ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ τὰ ποσὰ ἑτέρων τινῶν ἀναφορῶν, οἷον κτήσεως, χρέους, ἢ καὶ ὀφειλῆς ἐστὶν ἐπιδεκτικά, τὴν μὲν πρώτην διὰ τοῦ $+$ σημαίνουσιν ἰδίως, ἀφαιρ. τὴν δὲ δευτέραν διὰ τοῦ 0, καὶ τὴν τρίτην διὰ τοῦ $-$. ὅθεν καὶ τὸ ποσὸν τὸ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$ ἔχον, ἢ μηδὲν τῶν τοιούτων σημείων, οἷον τὸ α, $+\beta$, προσθετικὸν ποσόν, ἢ θετικὸν ὀνομάζεται. τὸ δὲ τὸ 0 πρὸ αὐτοῦ ἔχον, μηδέν, ἢ μηδενικὸν ποσὸν λέγεται. τὸ δὲ τὸ $-$, ἀφαιρετικόν, ἢ ἀποθετικὸν ποσὸν καλεῖται.

§7: Λέγεται δὲ τὸ ποσὸν μονώνυμον μὲν, ἤτε μονομερές, τὸ δι' ἑνὸς παριστάμενον μέρους, οἷον τὸ α, $-\beta$, γ κτλ. διώνυμον δέ, ἤτε διμερές, τὸ διὰ δύο, ὡς τὰ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, τριώνυμον δέ, τὸ διὰ τριῶν, οἷον τὸ $\alpha-\beta+\gamma$, καὶ πολυώνυμον ἐν γένει τὸ διὰ πολλῶν ὡς τὰ $\alpha+\beta-\gamma+\delta+$κτλ, $\alpha+\beta+\beta-\gamma+\delta-$κτλ, ταῦτα δὲ καὶ σχήματα, ἤτε σύνθετα ποσοτικὰ καλοῦνται. ὅροι δὲ τούτων ὀνομάζονται, τὰ συντιθέντα αὐτὰ μέρη, οἷον τὰ α, β, κτλ. καὶ ὅμοιοι μὲν οἱ διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐκτιθέμενοι, οἷον οἱ β, β, ἀνόμοιοι δέ, οἱ δι' ἑτέρων, καὶ ταυτόσημοι μὲν οἱ τὰ αὐτὰ πρὸ αὐτῶν ἔχοντες σημεῖα ὡς οἱ, $\alpha+\beta$, ἑτερόσημοι δὲ οἱ διάφορα ὡς οἱ, $-\gamma+\delta$.

§8: Ἐὰν δὲ τὰ ἔχοντα τοὺς ὅρους ὁμοίους ὅρους σχήματα, ὡς ἁπλούστερα μέν, ταυτόσημα δέ, ἀναγαγεῖν θελήσωμεν, τότε συνάπτομεν τοὺς ὁμοίους καὶ ταυτοσήμους ὅρους, ἤτε ἕνα μόνον γράφομεν ὅρον, πρὸ αὐτοῦ δὲ σημεῖον μὲν τὸ σημεῖον τῶν συντεθέντων ὅρων, καὶ ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τῶν ὁμοίων ὅρων τὸν ἀριθμόν, ὅστις καὶ ἀριθμὸς ... ἢ προσθέτης τοῦ ὅρου ὀνομάζεται. ὅταν δὲ οἱ ὅμοιοι ὅροι ἑτερόσημοι ..., τότε συνάπτονται κατὰ μέρος τοὺς ταυτοσήμους ὅρους, ἕνα μόνον αὐτῶν γράφομεν ὅρον, πρὸ αὐτοῦ δέ, σημεῖον μέν, τὸ τοῦ μείζονος ἑτεροσήμου προσθέτου, καὶ ἀριθμὸν τὸν σημαίνοντα τὴν διαφορὰν τῶν δύο προσθέτων, οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, ἡ σύνθεσις $\delta+\alpha+\zeta+\alpha-\kappa+\alpha$ ὡς ἁπλουστέραν ἀναχθεῖσα μορφήν, ὧδε σημειωθήσεται $\alpha+\delta+2\varepsilon+\zeta-\kappa$, ἡ δὲ $-\gamma+\delta-\alpha-\gamma+\delta+\gamma-\alpha+3\gamma$ ὡς τὴν $-\alpha+2\gamma+2\delta-\alpha$ ἀναχθήσεται, φυλακτέος δηλ. τῆς τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου τάξεως. ἡ τοιαύτη λοιπὸν τοῦ ποσοῦ ἁπλουστέρα γραφὴ ἀναγωγὴ τοῦ ποσοτικοῦ ὀνομάζεται ἐκθέσεων, ἢ μικρὸν εἰς τοὺς ποσοτικοὺς ὑπολογισμοὺς συντείνουσα.

Κ: φ: β^ον Περὶ τῶν τοῦ ποσοῦ παθῶν

§9 Τοιαύτη μὲν ἐστὶν ἡ τοῦ ποσοῦ γραφή. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦτο ἄθροισμα ὂν τῶν ζητουμένων μονάδων, εἰς δύο μόνον ὑπόκειται μεταβολάς, αὔξησιν δηλ: καὶ μείωσιν, δῆλον ὅτι δύο ἔσονται καὶ τὰ κυριώτερα αὐτοῦ πάθη, πρόσθεσις δηλ: καὶ ἀφαίρεσις, ὧν μερικώτερα μὲν ὁ πολλαπλασιασμός, καὶ ἡ διαίρεσις, τούτων δὲ πάλιν ἡ ὕψωσις, καὶ ἡ τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγή, περὶ ὧν κατὰ μέρος ῥηθήσεται.

Περὶ Προσθέσεως.

§10 Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὴν ποσοτικὴν τὰ προσθετέα, οὐ μόνον θετικά, ἀλλὰ καὶ ἀποθετικὰ περιέχουσι ποσά (6) δῆλον ὅτι ἡ Πρόσθεσις ἐνταῦθα γενικῶς θεωρουμένη, οὐχὶ αὔξησιν ἐν γένει σημαίνει, ἀλλ' ἁπλῶς σύνταξίν τινα τῶν εἰς πρόσθεσιν δοθέντων ποσῶν. Ὅθεν καὶ τὸ κ: φ: πολλάκις ἔλαττον εὑρίσκεται, καὶ ἑνὸς μόνου τῶν δοθέντων ὅρων.

§11: Ὅθεν μανθάνομεν, ὅτι εἰ μόνον τὰ προσθετέα, ὁπωσδήποτε, κατὰ σειρὰν συντάξωμεν εἰς ἁπλουστέραν ἀνάλογον μορφὴν (8) τὸ ζητούμενον εὑρήσομεν κ: φ: οἷον, φέρ' εἰπεῖν τὰ προσθετέα $\alpha+4\beta+\gamma$, $\gamma-5\eta+\delta$ κατὰ σειρὰν γράψας εὑρήσω $\alpha+4\beta+\gamma+\gamma-5\eta+\delta$ εἰς ἁπλουστέραν δὲ ἀναγαγὼν μορφήν, ἕξω $\alpha+4\beta+2\gamma+\delta-5\eta$. ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

§12: Ὅταν δὲ πολλὰ τὰ δοθέντα ὑπάρχωσιν, ἀναγαγόντες πρῶτον αὐτὰ κατὰ μέρος εἰς ἁπλουστέραν μορφήν, καὶ κατὰ στήλην τοὺς ὁμοίους ὑπὸ τοὺς ὁμοίους γράψαντες ὅρους, ὑπ' αὐτὰ γραμμήν τινα πρὸς διάκρισιν τοῦ ζητουμένου ὑποσημειώσαντες, καὶ κατὰ μέρος τὰ καθ' ἑκάστην στήλην ποσὰ συνάψαντες, ὑπὸ δὲ τὴν γραμμὴν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ τὸν ἀνήκοντα τόπον ὑπογράψαντες, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. Οἷον φέρ' εἰπεῖν τὰ προσθετέα $\alpha-3\delta+6\gamma-4\gamma$, $\delta-5\gamma-4\alpha+2\alpha$ εἰς τὰ (a) $2\gamma-3\delta+\alpha$, $-5\gamma+\delta-2\alpha$ πρῶτον ἀναγαγών, καὶ ὡς αὐτὰ (a) φαίνεται ἐργασίᾳ $-5\gamma+\delta-2\alpha$ γράψας, καὶ τὴν ἀναγωγὴν ἑκάστης στήλης ποιήσας (8) καὶ ἕκαστον ἐξαγόμενον κατὰ τὸν $-3\gamma-2\delta-\alpha$ οἰκεῖον τόπον ὑπογράψας, ἕξω ζητούμενον κ: φ: τὸ $-3\gamma-2\delta-\alpha$.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

§13: Ἡ Ἀφαίρεσις γενικῶς θεωρουμένη, τὴν μεταβολὴν σημαίνει θετικῆς, ἢ ἀποθετικῆς ἀναφορᾶς ποσοῦ τινός, καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐνταῦθα ἐν γένει θετικὰ καὶ ἀποθετικὰ ποσὰ ὡς ἀφαιρετέα δίδονται, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀποθετικὴ τοῦ ποσοῦ ἀναφορὰ ἀφαιρουμένη, εἰς θετικὴν μεταβάλλεται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἀνάγκη ἐστὶ πρὸς ἀφαίρεσιν παντὸς ποσοῦ, τὴν μὲν θετικὴν αὐτοῦ ἀναφορὰν, εἰς ἀποθετικὴν μεταβάλλειν, τὴν δὲ ἀποθετικὴν εἰς θετικήν. διὸ καὶ ἡ διαφορὰ πολλάκις μεῖζον ἀριθμεῖ τοῦ μειωτέου ποσοῦ.

§14 Ἐκ τούτων μανθάνομεν, ὅτι ἂν μόνον μεταβαλόντες τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου ποσοῦ, τῷ μειωτέῳ αὐτὸ προσθέσωμεν (11) (12), ἕξομεν τὴν ζητουμένην διαφοράν. Οὕτω φέρ' εἰπεῖν, ἀφαιρεθέντος μὲν τοῦ β ἀπὸ τοῦ α, εὑρίσκομεν $\alpha - \beta$ διαφοράν, ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ $-\delta$ ἀπὸ τοῦ γ, ἕξομεν $\gamma + \delta$.

§15: Ἐὰν ζητηθῇ λοιπὸν ἵνα ἡ σύνθεσις $51\alpha - 27\beta + 11\gamma - 4\delta$ ἀπὸ τῆς $17\alpha + 2\mu - 9\beta - 4\gamma + 23\delta$ ἀφαιρεθῇ, μεταβαλὼν τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου, ἕξω $-51\alpha + 27\beta - 11\gamma + 4\delta$, γράψας δὲ τὸν μειωτέον, καὶ τὸν ἀφαιρετέον οὕτω κατὰ τὰ σημεῖα μεταβληθέντα, ὡς ἐν τῇ (6) ἐργασίᾳ φαίνεται, τὰ ὅμοια δηλ. ὅρη ὑπὸ τὰ ὅμοια, καὶ τὴν ἀναγωγὴν κατὰ ζήτησιν ποιήσας, εὑρήσω ἐξαγόμενον τὸ $-34\alpha + 18\beta - 15\gamma + 27\delta + 2\mu$, ὅπερ ἦν τὸ ζητ.

(6)

$$\begin{array}{l} 17\alpha - 9\beta - 4\gamma + 23\delta + 2\mu \\ -51\alpha + 27\beta - 11\gamma + 4\delta \\ \hline -34\alpha + 18\beta - 15\gamma + 27\delta + 2\mu \end{array}$$

§16 Βασανίζεται δὲ καὶ ἐνταῦθα ἡ μὲν πρόσθεσις δι' ἀφαιρέσεως, ἡ δὲ ἀφαίρεσις διὰ προσθέσεως, οὕτω, φέρ' εἰπεῖν ἐν τῷ κ.γ. $\alpha + \beta$, ἀμφοτέρων τῶν προστεθέντων ἀφελὼν α εὑρήσω λείψανον, ὡσαύτως τῇ διαφορᾷ τῶν $\gamma, -\delta$ τοῦ $-\delta$ ἀφαιρετοῦ, ἤτε τῇ $\gamma + \delta$ τὸν ἀφαιρετέον $-\delta$ προσθείς, ἕξω τὸν $\gamma + \delta - \delta = \gamma$, ἤτοι τὸν δοθέντα μειωτέον. Ὅθεν βεβαιοῦμαι, ὅτι ἀληθής ἐστιν, καὶ κατὰ τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἀφαίρεσιν ἐργασία αὐτῶν.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ

17: Ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, τοσάκις ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ περιέχεται, καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦθα τοῦ ποσοῦ γενικῶς γενικὸς θεωρητέος, οὐ μόνον θετικῶς ἡ μονάς, ἀλλὰ καὶ ἀποθετικῶς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ εὑρίσκεται, ἕπεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιαστέος εἰς μέρη οὐ μόνον θετικῶς, ἀλλὰ καὶ ἀποθετικῶς ληφθήσεται, τ.ἔ.: οὐ μόνον πολλάκις προστεθήσεται, ἀλλὰ καὶ πολλάκις ἀφαιρεθήσεται· καὶ εὐπορέως τὸ γινόμενον ἔλαττον θατέρου παραγόντος πολλάκις ἔσται. Ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς γενικῶς ἐνταῦθα θεωρητέος, οὐ μόνον τὴν πολλαπλασίαν τοῦ πολλαπλασιαστέου σημαίνει πρόσθεσιν, ἐὰν ἐπεὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς θετικῶς δοθῇ, ἀλλὰ καὶ τὴν πολλαπλασίαν αὐτοῦ δηλώσει ἀφαίρεσιν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀποθετικῶς ὑποτεθῇ.

18: Σημειοῦται δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὐ μόνον τῷ σημείῳ $\times$, ὃ μεταξὺ τῶν ποσῶν τίθεμεν, ἀλλὰ καὶ αὐτοτελῶς τοῦ ποσοῦ μόνον κατὰ σειρὰν γραφομένων ὅλων ὁσάκις γράφεται $\alpha \times \beta$, $\alpha . \beta . \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, ἐννοεῖται ἡ ὅτι τὸ α, β κις λαμβάνεται, ἢ ὅτι τὸ β, α κις, προφέρεται δέ, ἢ ἄλφα ἐπὶ τὸ βῆτα, ἐπὶ τὸ γάμμα, ἢ ἄλφα, βῆτα.

19 Ἐὰν δὲ ἀριθμός, ἤτε προστεθῇ πρὸ αὐτῶν τῶν δοθέντων ἔχουσι ποσά,

τότε μετὰ τὸ γινόμενον τοῦ προσθετοῦ ἀμέσως τὸ ἐκ τοῦ ποσοῦ γράψαντες, ἔξομεν τὸ ζητούμενον, οἷον, φέρ' εἰπεῖν δοθέντων τῶν παραγόντων $5α$, $3β$, $4γ$, εὑρήσομεν γινόμενον $60αβγ$.

§ 20: Ὅταν δὲ οἱ παράγοντες ὅμοιοι δοθῶσι, τότε, ἢ πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς γράφομεν ὡς ἀνωτέρω, (18, 19) ἢ ἁπλούστερον ἕνα μόνον γράφομεν παράγοντα, ἐπιγράφοντες ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμόν, ἤτε ἐκθέτην, τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγόντων δηλοῦντα· οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων μὲν τῶν παραγόντων α, α, α, α, α ἔξομεν γινόμενον ααααα, ἤτε $α^5$, δοθέντων δὲ τῶν ββββ, βββ, ἤτε τῶν $β^4$, $β^3$, εὑρήσομεν $βββββββ = β^7 = β^{4+3}$. ἐξ οὗ δῆλον γίνεται, ὅτι τῶν παραγόντων ὁμοίων ὄντων, ἐὰν ἕνα μόνον γράψαντες, γράψωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἐκθέτην, τὸ κ. φ. τῶν κατὰ μέρος ἐκθετῶν δηλοῦντα, ἔξομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον, οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων τῶν $3γ^2$, $4γ^3$, $2γ^4$, εὑρήσομεν γινόμενον $24γ^9 = 24γ^{2+3+4}$.

§ 21: Ἐπειδὴ δὲ ὁσάκις προστίθενται θετικὰ ποσά, ἢ ἀφαιροῦνται ἀποθετικά, (13), ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν θετικόν, ὁσάκις δὲ ἀφαιροῦνται θετικά, ἢ προστίθενται ἀποθετικά, ἐξαγόμενον λαμβάνομεν ἀποθετικόν, καὶ ἐπειδὴ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ πολλάκις προστίθεμεν, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ θετικοῦ ὄντος, ἢ πολλάκις ἀφαιροῦμεν, ἀποθετικοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὑπάρχοντος, ἕπεται, ὅτι, ὁμοσήμων μὲν τῶν παραγόντων δοθέντων, τὸ γινόμενον θετικὸν ἔσται, ἑτεροσήμων δὲ ὄντων, ἀποθετικὸν εὑρεθήσεται. οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων μὲν τῶν $α$, $β$, ἢ τῶν $-α$, $-γ$, ἔξομεν $αβ$, $αγ$ γινόμενα. δοθέντων δὲ τῶν $-α$, $β$, ἢ τῶν $α$, $-γ$ εὑρήσομεν $-αβ$, $-αγ$.

22: Διὰ τῶν τοιούτων δὲ παρατηρήσεων, οὐ μόνον ὁ τῶν μονωνύμων πολλαπλασιασμός, ἀλλὰ καὶ ὁ τῶν πολυωνύμων τελείως ἀποδείκνυται. καθότι ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον τὸν πολλαπλασιαστὴν γράψαντες, ὑπὸ δὲ τούτοις γραμμήν τινα πρὸς διάκρισιν τοῦ γινομένου ὑποσημειώσαντες, ὅλον δὲ τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ πάντων τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅρων πολλαπλασιάσαντες, τὰ δὲ κατὰ μέρος γινόμενα, κατὰ σειρὰν τάξαντες, καὶ εἰς ἓν συνάψαντες, (12), ἕξομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον.

§ 23: Θέλω, φέρ' εἰπεῖν, ζητηθέντος τοῦ ἐκ τῶν παραγόντων $5α^4 - 2α^3β + 4α^2β^2$, $α^3 - 4α^2β + 2β^3$ γινομένου, γράφω τοὺς δοθέντας παράγοντας ὡς ἐν τῇ (γ) ἐργασίᾳ φαίνεται.

$$\begin{array}{rl}
5α^4 - 2α^3β + 4α^2β^2 & (γ) \\
α^3 - 4α^2β + 2β^3 & \\
\hline
5α^7 - 2α^6β + 4α^5β^2 & \\
-20α^6β + 8α^5β^2 - 16α^4β^3 & \\
10α^4β^3 - 4α^3β^4 + 8α^2β^5 & \\
\hline
5α^7 - 22α^6β + 12α^5β^2 - 6α^4β^3 - 4α^3β^4 + 8α^2β^5 & (γ')
\end{array}$$

ἤγουν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ὅρον α^3 πολλαπλασιάσας, εὑρίσκω κατὰ μέρος γινόμενον τὸ $5\alpha^7 - 2\alpha^6\beta + 4\alpha^5\beta^2$, ἐπὶ δὲ τὸ $-4\alpha^2\beta$ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιάσας, λαμβάνω γινόμενον τὸ $-20\alpha^6\beta + 8\alpha^5\beta^2 - 16\alpha^4\beta^3$, πολλαπλασιάσας τελευταῖον αὐτὸν καὶ ἐπὶ τὸν ὅρον $2\beta^3$, ἕξω γινόμενον $10\alpha^4\beta^3 - 4\alpha^3\beta^4 + 8\alpha^2\beta^5$. Ταῦτα δὲ τὰ κατὰ μέρος γινόμενα συνάψας, εὑρήσω παραγόμενον τὸ (V), ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ~~Ὅταν δὲ~~

§24 Ὅταν δὲ καὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν δύο, ἢ πολλῶν ἐνθέσεων σημειῶσαι μόνον θελήσωμεν, τότε κατὰ σειρὰν γράφονται αὐταί, καὶ διὰ τῶν παρενθέσεων, ἢ διὰ τοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σημείου, καὶ διά τινων ἐπὶ τῶν ἐνθέσεων ἐπιτιθεμένων γραμμῶν, τὸν πολλαπλασιασμὸν δηλοῦντες, ὡς τὸ ζητούμενον κελεύομεν. Οἷον, φέρ' εἰπεῖν, τὰ σημεῖα $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma-\delta)$, $\alpha(\alpha+\beta)$, $\alpha\cdot\overline{\alpha+\beta}$, $\alpha\times\overline{\alpha+\beta}$, $\overline{\gamma+\delta}\cdot\overline{\epsilon+\zeta}$, $\overline{\alpha-\delta}\times\overline{\kappa+\lambda}$. δηλοῦσι τὰς ποσοτικὰς ἐνθέσεις πολλαπλασιαστέας εἶναι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου.

Περὶ Διαιρέσεως

§25: Ἡ Διαίρεσις ἐνέργεια θεωρητή, ζητεῖ οὐ μόνον τὸ πηλικάκις προσετέθη ποσόν τι, ἀλλὰ καὶ τὸ πηλικάκις ἀφῃρέθη, πρὸς παραγωγὴν γινομένου τινός, καὶ ἐπειδὴ εἰς ὁποιονδήποτε γινόμενον, ἀμφότεροι περιέχονται οἱ παράγοντες, καὶ ὁ πλάκις δηλ: προστιθέμενος, ἢ ἀφαιρούμενος, καὶ ὁ τὸ πηλικάκις δηλοῦν, διὰ τῆς διαιρέσεως ἐνεργείας, δοθέντος ὁποιουδήποτε γινομένου, καὶ θατέρου τῶν παραγόντων, ὁ ἕτερος εὑρίσκεται.

§26: Καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ γινομένῳ μόνοι περιέχονται οἱ παράγοντες, δίδοται δὲ θάτερος τούτων, δῆλον, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἤγουν ὁ ζητούμενος παράγων ἔσεται, τὸ ἐν τῷ γινομένῳ μὲν ἐμπεριεχόμενον ποσόν, μὴ εὑρισκόμενον δὲ ἐν τῷ δοθέντι παράγοντι, ἤγουν ἐν τῷ δοθέντι διαιρέτῃ, ὅθεν καὶ ὡς πηλίκον τὸ τοιοῦτον γράφοντες ποσόν, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. Οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος μὲν τοῦ γινομένου $\alpha\beta$, διαιρέτου δὲ τοῦ α, τὸ πηλίκον εὑρεθήσεται β, δοθέντος δὲ διαιρετέου τοῦ $\alpha^2\gamma$, καὶ διαιρέτου τοῦ α, ἔσεται πηλίκον τὸ $\alpha\gamma$, δοθέντος δὲ τοῦ διαιρετέου $12\alpha^3\beta\gamma^4$, καὶ διαιρέτου τοῦ $4\alpha\beta$, τὸ πηλίκον ἔσεται $\frac{12\alpha^3\beta\gamma^4}{4\alpha\beta} = 3\alpha^2\gamma^4$.

§27: Ὅθεν, ἐὰν τὰ δοθέντα ὅμοιοι ὦσιν ὅροι, μείζονα δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου ὅρος ἔχῃ ἐκθέτην, ἢ ὁ τοῦ διαιρέτου, τότε γράφοντες τὸν ὅμοιον ὅρον, καὶ ἐπ' αὐτοῦ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν γράψαντες, τὸ ζητούμενον πηλίκον εὑρήσομεν, οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος μὲν γινομένου τοῦ α^5, καὶ διαιρέτου τοῦ α^2 ἕξομεν πηλίκον $\frac{\alpha^5}{\alpha^2} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha} = \alpha\alpha\alpha = \alpha^3 = \alpha^{5-2}$.

§28: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἐὰν οἱ δοθέντες μηδὲν ἔχωσι κοινὸν ποσόν, ἢ ἔχωσι μέν, ὅδε τὸ ποσὸν τοῦ διαιρέτου ἐκθέτης μείζων ἢ τοῦ ἐκθέτου, τὸ κατὰ τὸ γινόμενον ποσόν, ἢ, ἐὰν οἱ τῶν δοθέντων προσθέται μηδόλως διαιρῶνται, τότε ἡ διαίρεσις ἐστ' ἀδύνατος

λέχθωσα

ἔχουσα, σημειοῦται μόνον, καὶ ᾗ δυνατὸν ὡς ἁπλουστέραν τὸ πηλίκον ἀνάγεται μορφήν, τῶν αὐτῶν ἀποβαλλομένων γραμμάτων, ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ. οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, τὸ πηλίκον τοῦ β διὰ τοῦ α διαιρεθέντος, ἔσται $\frac{\beta}{\alpha}$, τὸ πηλίκον δὲ τοῦ $11\alpha\beta\gamma$ διὰ τοῦ $4\alpha\beta^3\delta$, εὑρεθήσεται $\frac{11\alpha\beta\gamma}{4\alpha\beta^3\delta}=\frac{11\gamma}{4\alpha\beta^2\delta}$.

§29. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον δηλοῖ, ποσάκις ὁ διαιρέτης προστεθείς, ἢ ἀφαιρεθείς, τὸ γινόμενον, ἤτοι τὸν διαιρετέον παρήγαγεν, ἔπεται, ὅτι τῶν δοθέντων θετικῶν ὄντων, καὶ τὸ πηλίκον θετικὸν ἔσται, δηλοῦν, ὁσάκις προσετέθη ὁ θετικὸς παράγων, ἤτοι ὁ διαιρέτης, εἰς παραγωγὴν τοῦ θετικοῦ γινομένου, ἤτοι τοῦ θετικοῦ διαιρετέου. ἀποθετικῶν δὲ δοθέντων, θετικὸν πάλιν ἔσται τὸ πηλίκον, ποσάκις ὁ ἀποθετικὸς προσετέθη διαιρέτης, ἤτοι παράγων, σημαῖνον, εἰς παραγωγὴν τοῦ ἀποθετικοῦ διαιρετέου, ἤτοι γινομένου. ἐὰν δέ, ὁ μὲν διαιρέτης θετικὸς ὑπάρχῃ, ὁ δὲ διαιρετέος ἀποθετικός, ἀποθετικὸν εὑρεθήσεται τὸ πηλίκον, ποσάκις ὁ θετικὸς διαιρέτης ἀφῃρέθη, σημαῖνον, πρὸς παραγωγὴν ἀποθετικοῦ γινομένου. ὡσαύτως τοῦ διαιρέτου ἀποθετικοῦ ὄντος, τοῦ δὲ διαιρετέου θετικοῦ, ἀποθετικὸν ἔσται τὸ πηλίκον, ποσάκις ὁ ἀποθετικὸς ἀφῃρέθη διαιρέτης, δηλοῦν, εἰς εὕρεσιν τοῦ θετικοῦ διαιρετέου, ἤτοι γινομένου. ὅθεν μανθάνομεν, ὅτι τῶν δοθέντων ταυτοσήμων μὲν ὄντων, τὸ πηλίκον θετικὸν ἔσται. ἑτεροσήμων δέ, ἀποθετικὸν εὑρεθήσεται. βεβαιούμεθα δὲ προσέτι εἰς τοῦτο, ἐννοοῦντες, ὅτι τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιαζόμενον τὸν διαιρετέον παράγει. καὶ ἀκολούθως, ὅτι ἀνάγκη ἐστίν, ἵνα ταυτοσήμων μὲν τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου δοθέντων, θετικὸν ληφθῇ τὸ πηλίκον, ἑτεροσήμων δέ, ἀποθετικόν. καθότι, τὸ γὰρ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιαζόμενον, τὸν δοθέντα ὀφείλει διαιρετέον, ἤτοι τὸ δοθὲν γινόμενον. ὅθεν διαιρεθέντος μὲν τοῦ $\alpha\beta$ διὰ τοῦ α, ἢ τοῦ $-\gamma\delta$, διὰ τοῦ $-\gamma$, ἔσονται $\frac{\alpha\beta}{\alpha}=\beta$, $\frac{-\gamma\delta}{-\gamma}=\delta$, διαιρεθέντος δὲ τοῦ $-\varepsilon\zeta$ διὰ τοῦ ε, ἢ τοῦ $\eta\theta$, διὰ τοῦ $-\eta$, εὑρεθήσονται $\frac{-\varepsilon\zeta}{\varepsilon}=-\zeta$, $\frac{\eta\theta}{-\eta}=-\theta$.

§30. Μετὰ τὰς παρατηρήσεις δὲ ταύτας εὐχερῶς, καὶ ἡ τῶν πολυωνύμων ἐκτελεσθήσεται διαίρεσις. καθότι γράψαντες τοὺς δοθέντας, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν οὕτω τάξαντες, πρῶτον δηλ. τὸν ἔχοντα τὸν μέγιστον ἐκθέτην, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ποσόν, ἤτοι τοὺς λοιποὺς κατὰ τάξιν, διαιροῦμεν τὸν πρῶτον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τοῦ γινομένου ὅρον, διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου, ἤτοι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. καὶ ἐπειδὴ πάντες οἱ ὅροι οὗτοι ὑπάρχοντες ἐν τῷ διαιρετέῳ περιέχονται, καταλαμβάνομεν, ὅτι τὸ οὕτως εὑρεθὲν πηλίκον, ὅρος ἔσται τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ἤτοι τοῦ ζητουμένου πολλαπλασιαστοῦ, ὅθεν γράψαντες αὐτό, εἰς τὸν δι' αὐτὸ τόπον σὺν τῷ οἰκείῳ σημείῳ, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸν διαιρέτην (21) τὸ δὲ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιροῦντες (15) διαιροῦμεν πάλιν, ὡς καὶ ἀνωτέρω τον πρῶτον τοῦ λειψάνου ὅρον, διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου, καὶ τέλος εὑρόντα τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ὃς τὸν δίκαιον αὐτοῦ γραφέσθω τόπον, τὸ δὲ ἐπ᾽ αὐτοῦ δὲ καὶ τοῦ διαιρέτου γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρόντα, ὃς δεύτερον καλείσθω λείψανον, τοῦτο δὲ ὡσαύτως διαιροῦντα, καὶ τοῦτο αὐτὸ ἐπαναλέγοντα, τρίτον εὑρήσομεν λείψανον, ὅτε δὲ τελευτήσει, ἐὰν ō, ἢ μηδὲν, ἢ ἀδιαίρετον εὕρωμεν λείψανον. τότε δὲ τὴν διαίρεσιν σημειώσαντας μόνον (28) καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῷ εὑρεθέντι συνάψαντας πηλίκον, ἕξομεν τὸ ζητούμενον.

§31: Οἷον, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐὰν ζητηθῇ τὸ πηλίκον τοῦ διαιρετέου (δ) διὰ τοῦ (ὁ) διαιρέτου διαιρεθέντος, γράφω τὰ δοθέντα ὡς ἐν τῇ (Δ) ἐργασίᾳ φαίνεται,

$$
\begin{array}{r|l}
(\delta)\ 2\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2 & \alpha^2-5\alpha\beta+6\beta^2\ (\Delta) \\
\hline
 & 2\alpha^4-13\alpha^3\beta+31\alpha^2\beta^2-38\alpha\beta^3+24\beta^4\ (\delta') \\
 & (\gamma)\ -2\alpha^4+3\alpha^3\beta-4\alpha^2\beta^2 \\
\hline
 & (\lambda)\ -10\alpha^3\beta+27\alpha^2\beta^2-38\alpha\beta^3+24\beta^4 \\
 & (\gamma')\ 10\alpha^3\beta-15\alpha^2\beta^2+20\alpha\beta^3 \\
\hline
 & (\lambda')\ 12\alpha^2\beta^2-18\alpha\beta^3+24\beta^4 \\
 & (\gamma'')\ -12\alpha^2\beta^2+18\alpha\beta^3-24\beta^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

εἶτα διαιρῶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτως εὑρίσκω πηλίκον τὸ α^2, τὸ ἐπ᾽ αὐτοῦ δὲ καὶ τοῦ διαιρέτου γινόμενον (γ) ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφελὼν ὃς λείψανον καλεῖται τὸ (λ), τούτου δὲ τὸν πρῶτον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου διαιρῶν, εὑρίσκω πηλίκον $-5\alpha\beta$, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦτο, καὶ τοῦ διαιρέτου γινόμενον (γ'), ἀπὸ τοῦ (λ) ἀφελὼν, ἔχω δεύτερον λείψανον τὸ (λ'), τούτου δὲ τὸν πρῶτον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου ὡσαύτως διελὼν, λαμβάνω πηλίκον τὸ $6\beta^2$, τὸ ἐπὶ τοῦτο δὲ καὶ τοῦ διαιρέτου γινόμενον (γ''), ἀπὸ τοῦ (λ') ἀφαιρῶν, μηδὲν εὑρίσκω λείψανον. ὅθεν μανθάνω, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἐστὶ $\alpha^2-5\alpha\beta+6\beta^2$.

§32: Ἐνίοτε δὲ, ἐν ᾧ ἐπὶ τοῦ διαιρέτου τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν, καὶ ἄλλοι τινὲς παρεμπίπτοντες ὅροι μηδόλως ἐν τῷ διαιρετέῳ φαινόμενοι. τούτους λοιπὸν καὶ τοὺς εἰς τὸ λείψανον κατὰ τὴν προσήκουσαν αὐτοῖς τάξιν, καὶ οὕτως ἐπιτελεῖται τὴν ἐργασίαν, ἐὰν φέρ᾽ εἰπεῖν τὸ πηλίκον ζητηθῇ, τοῦ εἰ ἐθέλει $\alpha^3-\delta^3$, διὰ τοῦ $\alpha-\delta$ διαιρεθήσης, ἀφ᾽ οὗ εὑρὼ τὸ πηλίκον α^2, τὸν πρῶτον ὅρον α^3 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου α τοῦ διαιρέτου, διελὼν, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ γινόμενον $\alpha^3-\alpha^2\delta$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφελὼν, ὃς λείψανον $\alpha^2\delta-\delta^3$ καλεῖται. τούτου δὲ πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου διελὼν, καὶ τὸ πηλίκον $\alpha\delta$ ἐπὶ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιάσας, τὸ δὲ γινόμενον $\alpha^2\delta-\alpha\delta^2$, ἀπὸ τοῦ τὸ δεύτερον διαιρετέον ἀφαιρῶν, λείψανον εὑρήσω τὸ $\alpha\delta^2-\delta^3$. καὶ τούτου δὲ τὸν πρῶτον ὅρον διὰ τὸ πρῶτον διελών, καὶ τὸ πηλίκον δ^2 ἐπὶ τὸ διαιρέτην πολλαπλασιάσας, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιρῶν, οὐδὲν ἕξω λείψανον, ὡς ἐν τῇ (ε) ἁρμοδίᾳ καταφορᾷ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \alpha^2+\alpha\delta+\delta^2 \;(\epsilon) \\
\alpha-\delta & \alpha^3 \qquad\qquad -\delta^3 \\
 & -\alpha^3+\alpha^2\delta \\ \hline
 & \alpha^2\delta-\delta^3 \\
 & -\alpha^2\delta+\alpha\delta^2 \\ \hline
 & \alpha\delta^2-\delta^3 \\
 & -\alpha\delta^2+\delta^3 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

ὅθεν μανθάνω, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἐστιν, $\alpha^2+\alpha\delta+\delta^2$.

§33: Ἐὰν δὲ οἱ δοθέντες ἐξ ἄλλης ὅρης τὸ κατὰ τάξιν ποσὸν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὑψηλὸν ἐνδείκτην ἔχωσι, τότε γράφονται κατὰ τὴν τάξιν ὅρης κατὰ σειράν, τάττοντας ὅμως αὐτὰς κατὰ τάξιν ὡς πρὸς ἕτερον ποσὸν ἐν αὐτοῖς ὁριζόμενον. τοῦτο φέρ᾽ εἰπεῖν, ζητηθέντος τοῦ πηλίκου τοῦ διαιρετέου $-\alpha^4\beta^2+\beta^2\gamma^4-\alpha^2\gamma^4-\alpha^6+2\alpha^4\gamma^2+\beta^6+2\beta^4\gamma^2+\alpha^2\beta^4$. διὰ τοῦ διαιρέτου $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$ διαιρεθέντος, τάξας αὐτὰς ὡς ἐν τῇ (Z) ἁρμοδίᾳ καταφορᾷ,

$$
\begin{array}{r|ll}
 & -\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^4-\beta^2\gamma^2 \;(Z) & \\
\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & -\alpha^6-\alpha^4\beta^2+2\alpha^4\gamma^2+\alpha^2\beta^4 \quad : & -\alpha^2\gamma^4+\beta^6+2\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4 \\
 & \alpha^6-\alpha^4\beta^2-\alpha^4\gamma^2 & \\ \hline
 & -2\alpha^4\beta^2+\alpha^4\gamma^2+\alpha^2\beta^4 & -\alpha^2\gamma^4+\beta^6+2\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4 \\
 & 2\alpha^4\beta^2 \quad -2\alpha^2\beta^4-2\alpha^2\beta^2\gamma^2. & \\ \hline
 & \alpha^4\gamma^2-\alpha^2\beta^4-2\alpha^2\beta^2\gamma^2 & -\alpha^2\gamma^4+\beta^6+2\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4 \\
 & -\alpha^4\gamma^2 \quad +\alpha^2\beta^2\gamma^2. & +\alpha^2\gamma^4 \\ \hline
 & -\alpha^2\beta^4-\alpha^2\beta^2\gamma^2 & +\beta^6+2\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4 \\
 & \alpha^2\beta^4 & -\beta^6-\beta^4\gamma^2 \\ \hline
 & -\alpha^2\beta^2\gamma^2 & +\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4 \\
 & \alpha^2\beta^2\gamma^2 & -\beta^4\gamma^2-\beta^2\gamma^4 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

καὶ τὴν κατ᾽ αὐτὴν διαίρεσιν ἐκτελέσας (30) (32) εὑρήσω πηλίκον τὸ $-\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^4-\beta^2\gamma^2$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

§34: Ἡ διαίρεσις ἐνίοτε μακρῶς ἀπολήγει, ὅτε παρατηρήσαντες τὰς δοθείσας ποσότητας τὴν αὐτῶν ἢ δυνατὸν ἀναλύσομεν παράγοντας. τοῦτο, φέρ᾽ εἰπεῖν, ζητηθέντος τοῦ πηλίκου τῆς $\alpha^2-\alpha\beta$, διὰ τῆς $\alpha-\beta$, μεταβαλόντες τὴν $\alpha^2-\alpha\beta$ εἰς τὴν $\alpha(\alpha-\beta)$ εὐκόλως τὸ ζητούμενον εὑρίσκομεν. ὡσαύτως ζητηθέντος τοῦ πηλίκου τῆς $8\alpha^6-\kappa\alpha^3\beta^2+\kappa\alpha^3+2\alpha^3-$ [illegible] διὰ τῆς $2\alpha^3-\beta^2+1$ διαιρεθέντος, παρατηρήσαμεν, ὅτι ἡ διαιρετέα ἦν $4\alpha^3(2\alpha^3-\beta^2+1)+2\alpha^3-\beta^2+1$, ἤτοι ἦν $(4\alpha^3+1)(2\alpha^3-\beta^2+1)$ μεταβαλλομένη, μανθάνομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἐστὶ $4\alpha^3+1$.

435: Καθὼς ἡ μὲν πρόσθεσις διὰ τῆς ἀφαιρέσεως βασανίζεται, ἡ δὲ ἀφαίρεσις διὰ τῆς προσθέσεως, οὕτω καὶ ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς διὰ τῆς διαιρέσεως, αὕτη δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Κεφάλαιον ϛ^ον Περὶ Κλασμάτων.

436: Ὅταν ἡ διαίρεσις ἀδύνατος ἐστι, τότε σημειοῦται, μόνον αὐτὴν (28) γράφοντες τὸν μὲν διαιρετέον κατά τινος ὁριζοντίας εὐθείας, τὸν δὲ διαιρέτην ἀμέσως ὑποκάτω, τὸ τοιοῦτον γοῦν σχημάτιον ἔκθεσις κλασματική, ἤτοι κλάσμα ποσοτικόν, ὀνομάζεται, ἢ καὶ πολλάκις μορφὴν μόνον ἔχον κλάσματος, ὁπόσον ὑπάρχει ποσόν. οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, ζητηθέντος τοῦ πηλίκου τοῦ ε διὰ τοῦ ζ διαιρεθέντος, γράφομεν $\frac{\epsilon}{\zeta}$, ὅπερ δηλοῖ τὸ ε ποσὸν διαιρετέον εἶναι διὰ τοῦ ζ ποσοῦ, καὶ τὸ μὲν ε, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων ἀριθμητὴν ὀνομάζεται, τὸ δὲ ζ παρονομαστής, ἀμφότερα δὲ τὰ ποσὰ ὅροι τοῦ κλάσματος καλοῦνται.

437: Ἐὰν τοῦ κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς μόνον πολλαπλασιασθῇ, ἢ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ κλάσμα αὐξάνει· καθόλου ὁσάκις ὁ διαιρετέος μείζων ἀποκαθίσταται, ἢ ὁ διαιρέτης ἐλάσσων, τοσάκις ὅτι καὶ τῷ διαιρετέῳ μᾶλλον χωρῇ, καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ κλάσμα τοσάκις μεῖζον γίνεται.

438: Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς μόνον διαιρεθῇ, ἢ ὁ παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται, καθόλου ὁσάκις ὁ διαιρετέος ἐλάσσων γίνεται, ἢ ὁ διαιρέτης μείζων, τοσάκις τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ κλάσμα ἔλασσον ἀποκαθίσταται.

439 Ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ ποσοτικοῦ κλάσματος, ἢ διαιρεθέντων, ἢ πολλαπλασιασθέντων διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, τὸ κλάσμα κατὰ μορφὴν μόνον μεταβάλλεται, κατὰ δὲ τὸ ποσὸν οὐδεμίαν λαμβάνει ἀλλοίωσιν, τῶν ὅρων αὐτοῦ τὴν αὐτὴν πρὸς ἄλληλα διατηρούντων διαφοράν.

440. Διὰ τῆς τοιαύτης παρατηρήσεως, δοθέντος κλάσματος τινός, τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, εὑρίσκομεν μορφήν. καθόλου διὰ τοῦ κοινοῦ μεγίστου διαιρέτου ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διαιροῦντες, εἰς τοὺς ἁπλουστάτους ὅρους τὸ δοθὲν ἀνάγομεν κλάσμα.

441: Ὅταν ἀμφότεροι τοῦ κλάσματος οἱ ὅροι ἀμφότεροι μονώνυμοι δοθῶσιν, ἢ τουλάχιστον θάτερος αὐτῶν πολυώνυμος, τότε ἁπλῶς τὸ τοιοῦτον κλάσμα εἰς ἁπλουστάτην ἀνάγεται μορφήν, ὡς ἁπλῶς τοῦ κοινοῦ μεγίστου τῶν ὅρων εὑρισκομένου διαιρέτου. καθόλου τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων παραλείποντες ἀριθμητικῶς τε καὶ ποσοτικῶς, ἀμφοτέρωθεν ἀπαλείφοντες, τὴν ζητουμένην τοῦ κλάσματος εὑρίσκομεν μορφήν. οὕτω φέρ' εἰπεῖν, τὸ κλάσμα $\frac{6\beta^2\gamma\eta}{8\beta\delta}$ εἰς τὸ $\frac{3\beta\gamma\eta}{4\delta}$

ἀνάγεται, ἁπλούστερον μὲν τοῦ δοθέντος, τὸ αὐτὸ δὲ ὑποδηλοῦν ποσόν, ὁποῖον τὸ $\frac{6\alpha^2\beta^3-4\alpha\beta^4+18\beta^5}{8\alpha^4\beta^7\gamma^2}$ ἤ, τὸ $\frac{2\beta^3(3\alpha^2-2\alpha\beta+9\beta^2)}{8\alpha^4\beta^7\gamma^2}=\frac{3\alpha^2-2\alpha\beta+9\beta^2}{4\alpha^4\beta^4\gamma^2}$ μεταποιηθέν.

542. Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα πολυωνύμους ἔχῃ τοὺς ὅρους ἀμφοτέρους, τότε διὰ τοῦ ἑξῆς παρατηρητέου τὸ κοινὸν καὶ μέγιστον αὐτῶν ἀφεθέντος διαιρέτου, εἰς τὴν ζητουμένην ἀνάγεται μορφήν.

543. Καὶ πρῶτον πᾶς κοινὸς διαιρέτης, καὶ ὁ ποσότης ὁ μέγιστος δύο ὁποιωνδήποτε ποσῶν, διαιρῇ ἠκριβωμένως οὐ μόνον αὐτά, ἀλλὰ καὶ τὸ κατὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν ἐγκαταλειπόμενον λῆμμα· καθότι ὑποθέντες $\alpha\delta$, $\beta\delta$ τὰ ἔχοντα κοινὸν διαιρέτην, ἤτοι κοινὸν παράγοντα τὸν δ ποσά, ϖ δὲ τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha\delta$ διὰ τοῦ $\beta\delta$ πηλίκον, λ τὸ λῆμμα, ἕξομεν $\alpha\delta=\beta\delta\varpi+\lambda$. καὶ ἐσομένου $\alpha=\beta\varpi+\frac{\lambda}{\delta}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ α ὁλόκληρον ἐστὶ ποσόν, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ $\beta\varpi+\frac{\lambda}{\delta}$ ὁλόκληρον ἔσεται. τ. ἔ. ὅτι καὶ τὸ λῆμμα λ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου δ διαιρεθήσεται.

544. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ πᾶς κοινὸς διαιρέτης, καὶ τὸ λῆμμα διαιρῇ, δῆλον, ὅτι ὁ ζητούμενος οὐδέποτε τοῦ λήμματος μείζων ἔσται. ὅθεν διαιροῦντες τὸ μεῖζον τῶν δοθέντων ποσῶν, διὰ τοῦ ἐλάσσονος, τοῦτο δὲ διὰ τοῦ λήμματος, καὶ τοῦτο πάλιν διὰ τοῦ δευτέρου λήμματος καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, ἕως οὗ εἰς λῆμμα καταντήσομεν ἠκριβωμένως τὸ πρὸ αὐτοῦ διαιροῦν, ἕξομεν τὸ ζητούμενον.

545. Δεύτερον ἐπειδὴ καὶ ὁ κοινὸς διαιρέτης εἰς ἀμφότερα ἀριθμεῖται τὰ δοθέντα ποσά, ἐάν, ἢ διαιρῶμεν θάτερον ποσόν, ἢ πολλαπλασιάσωμεν διὰ ποσοῦ μηδόλως τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζοντος, ὁ δὲ ὁ κοινὸς τῶν ποσῶν διαιρέτης οὐδαμῶς μεταβολήν. ἔστω, φέρ' εἰπεῖν, τῶν ποσῶν $\alpha\beta\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon\zeta$, ὁ κοινὸς διαιρέτης ἐστὶ γ, ὅστις οὐδόλως μεταβάλλεται, ἐάν, ἢ τὸ πρῶτον ποσόν διὰ τοῦ $\alpha\beta\delta$ διαιρεθῇ, ἢ τὸ δεύτερον διὰ τοῦ $\eta\theta\iota\kappa$ πολλαπλασιασθῇ. ὅθεν πρὸς ἄρεσιν τοῦ κοινοῦ καὶ μεγίστου διαιρέτου, καὶ πολλαπλασιαστέον, καὶ διαιρετέον θάτερον τῶν δοθέντων διὰ ποσοῦ, ὅπερ οὐδόλως τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζει. καθότι τὸ τοιοῦτον οὐδεμίαν εἰς τὸν ζητούμενον κοινὸν διαιρέτην προ-ξενεῖ μεταβολήν, συντείνει δὲ μόνον πρὸς ἄρεσιν αὐτοῦ.

546. Ζητείσθω, φέρ' εἰπεῖν, ὁ κοινὸς καὶ μέγιστος διαιρέτης τῶν συνθέσεων $3\alpha^3-3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3$, $4\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$. πρῶτον διαιρῶ τὴν δευτέραν διὰ τοῦ β ποσοῦ, τοῦ μὴ πολλαπλασιάζοντος δηλ. τὴν πρώτην, καὶ οὕτω μεταβάλλω εἰς τὴν $4\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2$, καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος ταύτης οὐδόλως διαιρῇ τὸν πρῶτον τῆς ἑτέρας συνθέσεως, πολλαπλασιάζω τοὺς ὅρους τῆς πρώτης ἐπὶ τὸ 4 τὸ μὴ τὴν δευτέραν δηλ. πολλαπλασιάζοντος, καὶ οὕτως αἱ δοθεῖσαι εἰς τὰς $12\alpha^3-12\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-4\beta^3$, $4\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2$ μεταβάλλονται (45) εἶτα γράφω αὐτὰς ὡς ἐν τῇ (41) ἀρχικῇ φαίνεται.

$$
\begin{array}{l|l}
4\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2 & 12\alpha^3-12\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-4\beta^3 \quad (3\alpha+3) \\
 & -12\alpha^3+15\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 \\ \hline
 & 3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-4\beta^3 \\ \hline
 & 12\alpha^2+4\alpha\beta-16\beta^2 \\
 & -12\alpha^2+15\alpha\beta-3\beta^2 \\ \hline
 & 19\alpha\beta-19\beta^2 \\ \hline
 & \alpha-\beta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha-\beta & 4\alpha-1 \\ \hline
 & 4\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2 \\
 & -4\alpha^2+4\alpha\beta \\ \hline
 & -\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline
 & -\alpha+\beta \\
 & \alpha-\beta \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

διαιρῶν δὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου εἰς λῆμμα καταντῶ τὸ $3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-4\beta^3$ ὅπερ εἰς τὸ $12\alpha^2+4\alpha\beta-16\beta^2$ μεταβάλλω, τὸν δὲ πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου διαιρῶν, ἀδιαίρετον εὑρίσκω λῆμμα τὸ $19\alpha\beta-19\beta^2$, ὅπερ εἰς τὸ $\alpha-\beta$ μεταβαλών, διαιρῶ διὰ τούτου ὡσαύτως τὸν διαιρέτην $4\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2$ (447) καὶ τέλος εἰς μηδὲν κατάντω λῆμμα. Ὅθεν βεβαιοῦμαι, ὅτι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς τῶν δοθέντων διαιρέτης ἐστὶν ὁ $\alpha-\beta$.

447: Τοῦ κοινοῦ καὶ μεγίστου εὑρεθέντος διαιρέτου, διὰ τῆς ἁπλῆς διαιρέσεως εἰς τὸ ζητούμενον καταλήγομεν. οἷον φέρ' εἰπεῖν, ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3}{3\alpha^3-3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3}$ διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ διαιροῦντες (30), εὑρίσκομεν τὸ $\frac{4\alpha\beta-\beta^2}{3\alpha^2+\beta^2}$ ἰσοδύναμον μὲν τῷ δοθέντι, ἁπλούστερον δὲ κατὰ τὴν μορφήν.

448: Πολλάκις δὲ ἀντὶ τοῦ διαιρεῖν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ τὴν αὐτήν, ὅταν δηλαδὴ ἐπιτελοῦντες τὰ ποσοτικὰ κλάσματα, εἰς τὴν αὐτὴν δηλ. ἀνάγοντες παρονομασίαν, οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων τῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$, ἐὰν τοῦ μὲν $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ δ πολλαπλασιάσωμεν, τοῦ δὲ $\frac{\beta}{\delta}$ ἐπὶ τὸ γ, ἤτοι θατέρου κλάσματος ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου, ἕξομεν τὰ $\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}$, $\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$ ἰσοδύναμα μὲν τοῖς δοθεῖσι, εἰς τὴν αὐτὴν δὲ ἀναχθέντα παρονομασίαν.

449: Πολλῶν δὲ ὄντων τῶν δοθέντων κλασμάτων ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζοντες, τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου κλάσματος παρεκβαλλομένου, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον. οἷον, φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων τῶν εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ἀναχθησομένων κλασμάτων, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\delta}{\varepsilon}$, πολλαπλασιάζοντες τοῦ μὲν πρώτου ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ $\gamma\varepsilon$, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ τὸ $\beta\varepsilon$, καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ $\beta\gamma$, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\gamma\varepsilon}$, $\frac{\beta^2\varepsilon}{\beta\gamma\varepsilon}$, $\frac{\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\varepsilon}$, ἰσοδύναμα μὲν τοῖς δοθεῖσι, εἰς τὴν αὐτὴν δὲ ἀναχθέντα παρονομασίαν.

450: Ἐνίοτε δὲ καὶ διὰ μερικωτέρου πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ μερικωτέρας διαιρέσεως τὰ δοθέντα κλάσματα, εἰς τὴν αὐτὴν ἀνάγομεν παρονομασίαν, οἷον φέρ' εἰπεῖν τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta\delta}$, $\frac{\zeta}{\delta}$, τοῦ μὲν πρώτου τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ δ πολλαπλασιάζοντες, τοῦ δὲ τρίτου ἐπὶ τὸ β, εἰς τὴν αὐτὴν ἀνάγομεν παρονομασίαν. ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$, $\frac{\delta\zeta}{\beta\gamma\zeta}$, $\frac{\gamma\delta\kappa\lambda}{\beta\gamma\kappa\lambda}$, διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους, τοῦ μὲν δευτέρου διὰ τοῦ ζ, τοῦ δὲ τρίτου διὰ τοῦ $\kappa\lambda$, εἰς τὴν αὐτὴν ἀνάγομεν παρονομασίαν.

451: Μετὰ τὰς παρατηρήσεις ταύτας ἡ τῶν ποσοτικῶν κλασμάτων πρόσθεσις, ἤτοι σύνταξις, οὐδεμίαν παρέχει δυσχέρειαν, καθότι, ὅταν μὲν τὰ δοθέντα ὁμογενῆ ὦσι, τότε συντάττοντες αὐτὰ (11, 12) καὶ ὑπὸ τὸ κοινὸν γράφοντες παρονομαστὴν εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον. ὅταν δὲ ἑτερογενῆ δοθῶσι, τότε ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν, ἢ τὰ ὁμοίως προστιθέντες, εἰς τὸ ζητούμενον καταντῶμεν. οἷον φέρ' εἰπεῖν τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$ συντάττοντες, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha+\gamma-\delta}{\beta}$, τὰ δὲ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $-\frac{\varepsilon}{\theta}$ προστιθέντες, λαμβάνομεν $\frac{\alpha\delta\theta+\beta\gamma\theta-\beta\delta\varepsilon}{\beta\delta\theta}$.

452: Ὅταν δὲ ὁλοσχερὴς προσθετέος ὑπάρχῃ κλάσματι, τότε τὸν ὁλοσχερῆ ὁμογενῆ τῷ κλάσματι ἐκτελέσαντες, ἤτοι ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάσαντες, καὶ τὴν πρόσθεσιν ὡς ἀνωτέρω ποιήσαντες, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν τὰ δοθέντα β, $-\frac{\delta}{\gamma}$ συντάξαντες, ζητούμενον εὑρίσκομεν τὸ $\frac{\beta\gamma-\delta}{\gamma}$.

453: Ἡ τῶν κλασμάτων ἀφαίρεσις ὡσαύτως οὐδεμίαν ἔχει δυσχέρειαν. καθότι ὅταν μὲν τὰ δοθέντα τὸν αὐτὸν ἔχωσι παρονομαστήν, τότε ἀφαιρέντες τὸν ἀφαιρετέου ἀριθμητὴν ἐκ τοῦ μειωτέου (13, 14) καὶ ὑπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸν κοινὸν γράψαντα παρονομαστήν, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. ὅταν διάφορον τὰ δοθέντα ἔχωσι παρονομαστήν, τότε εἰς τὸν αὐτὸν ἀγαγόντα, καὶ τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἄνωθεν ποιήσαντα, εὑρήσομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος μὲν τοῦ μειωτέου $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ τοῦ ἀφαιρετέου $-\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\varepsilon}{\beta}$, ἕξομεν $\frac{\alpha+\delta-\varepsilon}{\beta}$, δοθέντος δὲ τοῦ μειωτέου $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ καὶ τοῦ ἀφαιρετέου $\frac{\zeta}{\eta}$, $-\frac{\theta}{\nu}$, εὑρήσομεν $\frac{\varepsilon\eta\nu-\gamma\zeta\nu+\gamma\theta\eta}{\gamma\eta\nu}$

§54: Ὅταν δὲ ἡ ἀφαίρεσις γίγνηται ἀπὸ ὁλοκλήρου ζητηθῇ, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, τότε τὸν ὁλοκλήρη ὁμογενῆ τῷ κλάσματι ποιήσαντες, ἤτοι ἐπὶ τῷ παρονομαστῇ πολλαπλασιάσαντες, καὶ τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω ἐκτελέσαντες, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος τοῦ μειωτέου α, καὶ τοῦ ἀφαιρετέου $\frac{\beta}{\gamma}$, $-\frac{\delta}{\varepsilon}$, εὑρήσομεν $\frac{\alpha\gamma\varepsilon-\beta\varepsilon+\gamma\delta}{\gamma\varepsilon}$, δοθέντος δὲ μειωτέου τοῦ $\frac{\theta}{\kappa}$, ἀφαιρετέου δὲ τοῦ λ, $-\zeta$, ἕξομεν $\frac{\theta-\kappa\lambda+\kappa\zeta}{\kappa}$.

§55: Ὁ δὲ τῶν κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς γίνεται ἀριθμητοῦ ἐπὶ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιασθέντα καὶ παρονομαστοῦ ἐπὶ παρονομαστοῦ. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων μὲν τῶν παραγόντων $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, ἔσται τὸ γινόμενον $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$, δοθέντων δὲ τῶν $\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\beta}{\gamma}$, εὑρεθήσεται $-\frac{\alpha}{\gamma}$, δοθέντων τελευταῖον τῶν $-\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\delta}{\varepsilon}$ γενήσεται $\frac{\alpha\delta}{\beta\varepsilon}$.

§56: Πολλῶν δὲ ὄντων τῶν δοθέντων κλασμάτων ὑπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ἁπάντων τὸ τῶν παρονομαστῶν γράψαντες, εὑρήσομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων τῶν παραγόντων $\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\gamma}{\delta}$, $-\frac{\varepsilon}{\zeta}$, ἕξομεν $\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$.

§57: Ἐὰν δὲ ὁλοκλήρη θάτερον τῶν παραγόντων ὑπάρχῃ, πολλαπλασιάσαντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητήν, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τὸν τοῦ κλάσματος γράψαντα παρονομαστήν, εὑρήσομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντων τῶν παραγόντων α, $\frac{\beta}{\gamma}$, ἕξομεν $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, δοθέντων δὲ τῶν α, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $-\frac{\delta}{\beta}$, εὑρήσομεν $-\frac{\alpha\delta}{\varepsilon}$.

§58: Καὶ ἡ τῶν κλασμάτων δὲ διαίρεσις γίνεται, ἢ ἐγχωρεῖ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιροῦντος διαιρεθέντα, καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, εἰ δὲ μή, ἀντὶ τοῦ διελεῖν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου, πολλαπλασιάσομεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιροῦντος, ἀντὶ δὲ τοῦ διελεῖν τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου, πολλαπλασιάσομεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιροῦντος, ἤτοι πολλαπλασιάσομεν χιαστὶ τοὺς ὅρους τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ διαιροῦντος, καὶ οὕτως εὑρήσομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον. οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος μὲν διαιροῦντος τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρετέου δὲ τοῦ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$, ἕξομεν πηλίκον τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$, δοθέντος δὲ διαιροῦντος τοῦ $-\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρετέου τοῦ $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, εὑρήσομεν τὸ $-\frac{\beta\varepsilon}{\alpha\zeta}$, δοθέντος τελευταῖον διαιροῦντος μὲν $-\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρετέου τοῦ $-\frac{\varepsilon}{\zeta}$, ἔσται τὸ πηλίκον $\frac{\beta\varepsilon}{\alpha\zeta}$.

§59: Ὅταν δὲ ὁ διαιρῶν ὁλοκλήρης ὑπάρχῃ, τότε, ἢ διαιρήσομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιροῦντος, ἢ τούτου μὴ γινομένου πολλαπλασιάσομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν δοθέντα ὁλοκλήρη διαιροῦντα, οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος μὲν διαιροῦντος τοῦ α, καὶ διαιρετέου τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἔσται τὸ πηλίκον $\frac{\beta}{\gamma}$, δοθέντος δὲ διαιροῦντος τοῦ $-\beta$

καὶ διαιρεῖται τῷ $\frac{\gamma}{\delta}$, εὑρεθήσεται $\frac{\gamma}{\epsilon\delta}$.

§60: Θέλων δὲ ὁ μὲν διαιρέτης κλασματικὸς δοθῇ, ὁ δὲ διαιρετέος ὁλοσχερής, ἐὰν μόνον διὰ τῷ ἀριθμητῇ τῷ κλάσματι τοῦ ὁλοσχερῆ διαιρετέον διέλωμεν, ἔλασσον τῷ ἀληθῶς παραλαβόμεν πηλίκου, ὡς δηλ. μείζονος διαιρέτου διαιρεῖ, ὅθεν ἵνα τὸ ἀληθὲς εὕρωμεν, δέον πρῶτον τοῦ ὁλοσχερῆ διαιρετέου διὰ τῷ ἀριθμητῇ τῷ κλάσματος, πολλαπλασιάσομεν αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῷ παρονομαστῇ. Ἔστω φέρ' εἰπεῖν δοθεὶς διαιρέτης μὲν τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρετέος τῷ γ, ἕξομεν πηλίκον $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

§61: Ἐὰν δὲ καὶ παρονομασταὶ τοῦ κλάσματος ὦσιν οἱ ὅροι, ὁπόταν ἐκτελεσθήσονται αἱ πολλαπλασιασμοί, ἂν τὸ ἐξαγόμενον εἰς ἁπλουστέραν ἀναχθῇ μορφήν, ὅταν δηλ. ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ὅροις αὐτοῦ οἱ αὐτοὶ ἀρίστανται παράγοντα.

§62: Βασανίζονται δὲ καὶ τοῦ ἀποτελεσματικοῦ κλάσματος ἡ μὲν πρόσθεσις δι' ἀφαιρέσεως, αὕτη δὲ δι' προσθέσεως, καὶ ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς διὰ διαιρέσεως, ἡ δὲ διαίρεσις δι' πολλαπλασιασμοῦ.

Περὶ Συνεχοῦς κλασμάτων.

§63: Ὅσα κλάσματα κατὰ συνέχειαν κλασματικὸς τὸν παρονομαστὴν ἔχουσι, συνεχῆ προσαγορεύονται, τοιαῦτα δὲ εἰσι τὰ $\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+$ κλ. διὰ τῆς συνεχοῦς τῷ μέσον διὰ τὸ ἐλάσσονος ὅρου διαιρέσεως κατάσταται τινὸς ἐξαγόμενα. Ταῦτα δὲ τὰ κλάσματα εἰς κοινὰ μεταβαλόντες, εὑρίσκομεν τὸ ὡς ἔγγιστα τοῦ δοθέντος ἰσότιμον, ποτὲ μὲν μεῖζον αὐτοῦ, ποτὲ δὲ ἧττον, τοσοῦτον δὲ αὐτῷ προσεγγίζον, ὅσον περισσότερα τὰ συνεχοῦς λαμβάνεται μέρη.

§64: Μεταβάλλονται δὲ τὰ συνεχῆ εἰς κλάσματα κοινά, διὰ τοῦ συνεχοῦς τοῦ κλασματικοῦ παρονομαστοῦ μετὰ τῶν ὁλοσχερῶν προσθέσεως. Ὅθεν τοὺς τοιούτους προστιθέντες παρονομαστὰς (52), αὐτὸ δὲ τῷ διαιρεῖν τοῦ παρονομαστοῦ τὸ ἐξαγόμενον κλάσματος, τοῦ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιάζοντες, (37) εὑρίσκομεν διάφορα ἰσότιμα τῷ δοθέντος κλάσματος τά

$$\alpha=\alpha$$

$$\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$$

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}=\frac{\gamma(\alpha\beta+1)+\alpha}{\beta\gamma+1}$$

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta}=\frac{\delta(\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha)+\alpha\beta+1}{\delta(\beta\gamma+1)+\beta}\ \text{κλ.}$$

§65: Παρατηρήσαντες δὲ ὅτι ὁ ἀποτεθησόμενος ἀριθμητὴς τοῦ τελευταίου ὡς ἔγγιστα ἰσοτίμου, ἴσος ἀεὶ τῷ ἀριθμητῇ τῷ προηγουμένου ἰσοτίμου ἐπὶ τὸ τελευταῖον παρονομαστὴν τὸ δοθέντος μέρη τὸ συνεχοῦς πολλαπλασιασθέντι, πρὸς δὲ καὶ τῷ ἀριθμητῇ τῷ προπροηγουμένου ἰσοτίμου, καὶ ὅτι ὁ ἀποτεθησόμενος παρονομαστὴς ὡσαύτως ἴσος ἀεὶ τῷ παρονομαστῇ τῷ προηγουμένου ἰσοτίμου ἐπὶ τὸ τελευταῖον παρονομαστὴν τὸ δοθέντος μέρη τὸ συνεχοῦς πολλαπλασιασθέντι, πρὸς δὲ καὶ τῷ παρονομαστῇ τῷ προπροηγουμένου, εὐχερῶς ἀποτεθησόμενα εὑρήσομεν ἰσότιμα. Ἔστω φέρ' εἰπεῖν ζητηθέντος τὸ τρίτον ἰσότιμον, λαβὼν τὸν ἀριθμητὴν τὸ δευτέρου $\alpha\beta+1$ καὶ πολλαπλασιάσας αὐτὸν ἐπὶ τὸ γ παρονομαστὴν δηλ. τὸ τελευταῖον κλάσματος, τὸ δοθέντος μέρη τὸ συνεχοῦς, εὑρίσκω $\gamma(\alpha\beta+1)$ προσθεὶς δὲ αὐτῷ καὶ τὸν ἀριθμητὴν α τὸ πρώτου ἰσοτίμου, ὁ $\gamma(\alpha\beta+1)+\alpha$, ὅστις ἐστὶν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ζητητέου ἰσοτίμου, λαβὼν δὲ ὡσαύτως τὸν παρονομαστὴν β τοῦ δευτέρου ἰσοτίμου, καὶ πολλαπλασιάσας ἐπὶ τὸν γ, προσθεὶς δὲ καὶ τὴν 1 τὸν ὀνομαστὴν δηλ. τοῦ πρώτου ἰσοτίμου, ἕξω $\beta\gamma+1$ ὅστις ἐστὶν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητητέου. καὶ τὸ ζητούμενον τρίτον ἰσότιμον ἔσται, $\frac{\gamma(\alpha\beta+1)+\alpha}{\beta\gamma+1}$

§66. Ὡσαύτως, παρατηρήσαντες τὰ τοιαῦτα τοῦ κλάσματος μέρη, μανθάνομεν ὅτι τὸ μὲν πρῶτον ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς τὸ δεύτερον μεῖζον, ὡς ἐλαττωθὲν τῇ παρονομαστῇ αὐτοῦ, τὸ τρίτον ἔλασσον, ὡς ἐπειδὴ μὲν τὸν δευτέρου παρονομαστὴν αὐξάνομεν δὲ τῷ πρώτῳ καὶ οὕτω καθεξῆς. τὸ ἐναντίον δὲ συμβαίνει ἐὰν τὸ συνεχὲς κλάσμα ἄρχεται, καθότι τότε τὸ μὲν πρῶτον ἰσότιμον μεῖζον τοῦ ἀληθοῦς, ἔσται, τὸ δεύτερον ἔλασσον, καὶ οὕτω ἐφεξῆς.

§67. Ἐὰν δὲ καὶ τὰς διαφορὰς τῶν προσεχῶν ζητῶμεν ἰσοτίμων, ἕξομεν.

$$\frac{\alpha\beta+1}{\beta}-\alpha=\frac{1}{\beta}$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}-\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=-\frac{1}{\beta(\beta\gamma+1)}$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta}-\frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}=\frac{1}{(\beta\gamma+1)(\beta\gamma\delta+\delta+\beta)}$$ κλ. ὅθεν μανθάνομεν ὅτι

ἡ διαφορὰ δύο προσεχῶν ἰσοτίμων τοσοῦτον συμμικρύνεται, ὅσον τὰ λαμβανόμενα ἰσότιμα ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφίστανται. ἐξ οὗ δῆλον γίνεται ὅτι ἅπαντα τὰ ἰσότιμα ἀπαραλλάκτως ἐλάττονα ἢ μείζονα εἰσίν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, τότε ἅμα τὸ ἀληθὲς ἰσότιμον μεταξὺ δύο περιέχεται προσεχῶν ἰσοτίμων· ὅσον ὅμως ταῦτα προβαίνουσι, τοσοῦτον καὶ τῷ ἀληθεῖ προσεγγίζουσι. καθότι τοσοῦτον καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰ ἐλάσσων ἀποκαθίσταται.

Κεφάλαιον Δ. Περὶ Δυνάμεων.

§68. Τὸ διὰ τοῦ ἀλλεπαλλήλου πολλαπλασιασμοῦ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ λαμβανόμενον γινόμενον, δύναμις αὐτοῦ ὀνομάζεται, ὡς σημαῖνον τί τὸ ποσὸν αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δύναται. καὶ πρώτη μὲν προσαγορεύεται αὐτὸ τὸ ποσόν, οἷον τὸ α, τὸ β, κλ. δευτέρα δέ, ὅταν ἅπαξ ἐφ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, οἷον, τὸ α^2, β^2 κλ. τρίτη ὅταν δίς, ὡς τὸ α^3, β^3 κλ. καὶ δ δύναμις καλεῖται, ὅταν τὸ α ἐν $\delta-1$ φορὰς ἐφ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, ὡς τὸ α^δ, β^δ κλ. ὧν τὸ μὲν α, β, βάσις ἤτε ῥίζα προσαγορεύεται. τὸ δὲ δ ἐκθέτης καλεῖται, ὡς εὐλήπτως, ἢ ὅτι τοσάκις πολλαπλασιαστέον ἐστὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ, ὅσας αὐτὸς περιέχει μονάδας, μιᾶς μόνης ἀφαιρεθείσης, ἢ ὅτι τοσοῦτοι παράγοντες εἰσὶ τῆς δυνάμεως, ὅσας αὐτὸς περιέχει μονάδας.

§69. Αἱ τῶν δυνάμεων ποσότητα ἁρμόζουσι, ὡς καὶ αἱ τοῦ ἁπλοῦ ποσοῦ

ἀλλ' ἐκ τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως ὅπερ εἶχε διαφέρειν, ἢ δὲ πολ-
λαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως διὰ τοῦ εἴδη πολλαπλασιάσεως [illegible]

§70. Καὶ πρῶτον ἐπειδὴ $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4}$ (20) ἕξομεν ἐν γένει $a^\delta \cdot a^\mu = a^{\delta+\mu}$, $a^\delta \cdot a^\mu \cdot a^\pi = a^{\delta+\mu+\pi}$, ὅθεν ἔπεται, ὅτι γινόμενον δύο, ἢ πολλῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ ποσῷ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ὑψωθέντι, οἷον τὸ γινόμενον $(a+b)^\delta (a+b)^\theta = (a+b)^{\delta+\theta}$ ἴσον ἔσται, τὸ δὲ $(b-\gamma+\delta)^\mu (b-\gamma+\delta)^\nu (b-\gamma+\delta)^{\mu+\nu}$ φανήσεται.

§71. Ἐπειδὴ δ' ἔτι $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2}$ (27) ἔσται ἐν γένει $\frac{a^\delta}{a^n} = a^{\delta-n}$. ὅθεν δῆλον γίνεται τὸ πηλίκον ἐν γένει δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ ποσῷ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν ὑψωθέντι, τοῦ ἐκθέτου δηλ. τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθέντος.

§72. Ἐκ τούτου μανθάνομεν ὅτι τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἴσου τῷ ἐκθέτῃ τοῦ διαιρετέου ὄντος, τὸ πηλίκον τῇ μονάδι ἐξισοῦται, 0 ἔχει ἐκθέτην. οἷον τοῦ a^δ διὰ τοῦ a^δ διαιρεθέντος, ἕξομεν, $\frac{a^\delta}{a^\delta} = 1 = a^{\delta-\delta} = a^0$. ὅθεν ἔπεται, ὅτι ὁποιονδήποτε ποσὸν 0 ἔχον ἐκθέτην τῇ μονάδι ἐξισωθήσεται. οἷον ἔσται $a^0 = b^0 = \gamma^0 = (a+b-\gamma)^0 = 1$

§73. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δῆλον γίνεται, ὅτι ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου μείζων ᾖ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον ἀποφατικὸν ἕξει ἐκθέτην, οἷον φέρ' εἰπεῖν τοῦ a^0 διὰ τοῦ a^n διαιρεθέντος, εὑρίσκομεν $\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ὅθεν ἔπεται, ὅτι ὁποιονδήποτε ποσὸν ἀποφατικὸν ἔχον ἐκθέτην, ἴσον ἐστὶ κλάσματι, οὗτινος ὁ μὲν ἀριθμητὴς μονάς ἐστιν, ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτὸ τὸ ποσὸν θετικὸν τὸν αὐτὸν ἔχον ἐκθέτην, οἷον φέρ' εἰπεῖν $b^{-\delta} = \frac{1}{b^\delta}$ καὶ $(a+b-\gamma+\delta)^{-e} = \frac{1}{(a+b-\gamma+\delta)^e}$ ἔσται.

§74. Ἐὰν δὲ ζητηθῇ, ἵνα ὁποιονδήποτε ποσὸν εἰς τὴν δοθεῖσαν ὑψωθῇ δύναμιν, τότε τὸν ἐκθέτην τοῦ ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δοθείσης δυνάμεως πολλαπλασιάσαντες, ἕξομεν τὸ ζητούμενον, οἷον φέρ' εἰπεῖν, ζητηθείσης τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ a^2 εὑρίσκομεν $a^{2\cdot3} = a^6$: καθότι τοῦ a^2 δὶς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, ἔσται $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$ (70) καὶ ἐν γένει τοῦ b^μ εἰς τὴν ρ δύναμιν ὑψωθέντος, φανήσεται $b^{\mu\rho}$, τὸ δὲ $(a+b-\delta+e)^\mu$ εἰς τὴν λ γενήσεται $(a+b-\delta+e)^{\mu\lambda}$

§75. Ὅταν δὲ τὸ ποσὸν κλασματικὸν ὑπάρχῃ, τότε ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τὸν ἐκθέτην ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς δυνάμεως ἐκθέτην πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον. οἷον φέρ' εἰπεῖν τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ $\frac{a}{b}$ ζητηθείσης, ἕξομεν $\frac{a^3}{b^3}$, τῆς δευτέρας δὲ τοῦ $\frac{a^2}{b^3}$, εὑρίσκομεν $\frac{a^{2\cdot2}}{b^{3\cdot2}}$ καὶ ἐν γένει τῆς ρ τοῦ $\frac{\delta^\theta}{\gamma^\alpha}$ ζητηθείσης, ἕξομεν $\frac{\delta^{\theta\rho}}{\gamma^{\alpha\rho}}$:

76. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁποιονδήποτε ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸ ἅπαξ, δὶς ... πολλαπλασιαζόμενον

τὴν ζητο-

Ἀριθμητικῆς Κεφ. α΄. περὶ ἀριθμήσεως καὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν γραφῆς

α΄. Ἡ θαυμαστὴ τοῦ ἀνθρωπίνου συστήματος δύναμις, δι' ἧς τὰς ἰδιότητας τῶν περὶ αὐτὸν ὄντων, οὐ μόνον ἐπ' αὐτῶν τούτων, ἀλλὰ καὶ κατὰ μέρος αὐτὰς θεωρεῖν δύναται, ἔδωκεν ἀρχὴν τοῦ μεγάλου ἐκείνου μαθηματικοῦ κόσμου, οὗ τινος κτίστης ἄξιος αὐτός, καὶ δι' οὗ μάλιστα ἡ ὑπὲρ τὰ φαινόμενα κτίσματα τοῦ λογικοῦ τούτου ὄντος καθαρὰ ὑπεροχή.

β΄. Οὗτος φέρεται διὰ τῆς τοιαύτης δυνάμεως τὰς διαφόρους διαστάσεις τῶν περὶ αὐτὸν ὄντων κατὰ μέρος θεωρῶν, τὴν τῶν μεγεθῶν ἐπιστήμην, ἤτοι τὴν γεωμετρίαν ἐν γένει ἐφεῦρεν. Ὅτι τὰ περὶ αὐτὸν ὄντα, ἢ ὅμοια ἐν γένει ἐπισυνάπτων, λεγόμενον ποσὸν συνίστησιν, ὡρισμένως δὲ αὐτὰ προσθείς, τὸ ὡρισμένον ποσὸν ἤτοι τὸν ἀριθμὸν συμπεραίνει. Ὥστε ποσὸν μὲν ἐστὶν ἄθροισμα διαφόρων πραγμάτων ὁμοίων καὶ ἀφαίρεσιν δεχομένων, ἢ ἄθροισμα ταυτιζομένων ἰδεῶν, ἀριθμὸς δὲ ὡρισμένον τοῦτον καθ' ἓν καὶ μονὰς ἕκαστον τῶν μερῶν, ἐξ ὧν ἐκεῖνο σύγκειται.

γ΄. Τὰ περὶ μὲν ποσὸν ἐν γένει ἡ καλουμένη ἐπιστήμη ποσοτικὴ τὰ πάθη αὐτοῦ διερευνᾷ, περὶ δὲ τὸν ἀριθμόν, ἡ ἀριθμητικὴ ἰδιαιτέρως περιγράφει, τὰ περὶ αὐτὸν γινώσκουσα, πρῶτον δὲ τὰ περὶ ἀριθμήσεως καὶ γραφῆς αὐτοῦ διδάσκει.

δ΄. Πολλαὶ καὶ ἀναρίθμητοι αἱ δυναταὶ ὑπάρχουσιν ἀριθμήσεις, ἡ ἐν χρήσει ὅμως παρ' ἡμῖν, καὶ παρὰ πᾶσι σχεδὸν τοῖς ἔθνεσιν οὖσα, καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν δακτύλων ἀριθμήσεως, ὡς φαίνεται, λαβοῦσα τὴν ἀρχήν, ἀνὰ δέκα προβαίνει, τὰς αὐτὰς ἐπαναλαμβάνουσα μονάδας ἤτοι, ἕν, δύο, τρία, κτλ. ὅθεν καὶ δεκαδικὴ προσαγορεύεται, πασῶν τῶν λοιπῶν ἀριθμήσεων διάφορος οὖσα τῆς δυαδικῆς, τριαδικῆς κτλ. καθ' ἃς δηλ. μετὰ τὴν τῶν δύο, ἢ τριῶν, ἢ τεσσάρων περίοδον τὰς αὐτὰς δυνατὸν ἦν ἐπαναλαμβάνειν μονάδας.

§ ϛʹ. εἰς γραφὴν πάλιν τῶν ἀριθμῶν, ἣ καὶ πάντα σχεδὸν τὰ ἔθνη ἡ παρ' αὐτοῖς ἐ-
χρῶντο ἀλφαβήτῳ, οἱ δ' Ἕλληνες καὶ τοῖς ἀκροστίχοις τῶν ἀριθμητικῶν ὀνομάτων,
εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὅμως ὑπολογισμοὺς ἐν χρήσει οἱ ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες οἵδε,
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ἐγένοντο, ὧδε προφερόμενοι, μηδέν, ἕν,
δύο, [illegible], ἐννέα, οἵτινες ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ἑλληνικοῦ προελθόντες ἀλ-
φαβήτου, ἢ ἀκρόστιχα τῶν ἀριθμητικῶν ὀνομάτων ὄντες, εἰς ὁποιανδήποτε ἀριθ-
μοῦ γραφὴν, ἁρμοδιώτατοι εὑρέθησαν. καθότι ὁ τὴν χρῆσιν ἐπινοήσας
τῶν ἀριθμῶν γραφὴν, τὴν κοινὴν παρατηρήσας ἀρίθμησιν, καὶ ἰδὼν, ὅτι κατ'
αὐτὴν διάφοροι ~~[illegible]~~ προφέρονται μονάδες, αἱ μὲν πρῶται δηλ. ἁπλαῖ, αἱ δὲ δεύτεραι
τῶν δεκάδων σχηματα, αἱ τρίται ἐξ ἑκατοντάδων, καὶ οὕτω ἐφεξῆς ἀπέδωκεν
καὶ εἰς τοὺς ἀνωτέρω χαρακτῆρας διαφόρους δυνάμεις κατὰ τοὺς διαφόρους δηλ. τόπους.
καθ' οὓς γράφονται ~~ἐξ ἀριστερῶν~~ ἀπὸ δεξιῶν εἰς τὰ ~~δεξιὰ~~ ἀριστερὰ προβαίνοντες. ἤτοι δὲ ὅταν μὲν
οἱ χαρακτῆρες ὦσι ἐν τῷ πρώτῳ γραφόμενοι τόπῳ, τὰς ὅλας ἤτοι τὰς αὐτὰς
τὰς πρώτας δηλ. ἀριθμητικὰς δηλοῦσι μονάδας, ὅταν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ τὰς
δευτέρας, ἤτοι τὰς δεκαπλασίας, ἐν τῷ τρίτῳ τὰς τρίτας καὶ [illegible] καθεξῆς.
ὥστε εἰς τὴν τῶν ἀριθμῶν γραφὴν ὁ μὲν πρῶτος τόπος ἐστὶ τῶν μονάδων, ὁ δεύ-
τερος τῶν δεκάδων, ὁ τρίτος τῶν ἑκατοντάδων, ὁ δ' τῶν [illegible] χιλιάδων
ὁ ἕκτος τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων, ὁ ἕβδομος τῶν χιλιόνων, ὁ δέκα-
τος τῶν δισχιλιόνων, ὁ δέκατος ἔνατος τῶν τρισχιλιόνων, καὶ οὕτω
ἐφεξῆς, τῶν συστημάτων ἀνὰ ἓξ τόπους μεταβαλλομένων.

§ ζʹ. Ἀλλὰ τῶν μέχρι τοῦδε ῥηθέντων, ἐπειδὴ ὁποιονδήποτε ἀριθμ-
γραφῆς δυνάμεθα, καθότι τὰς μὲν μονάδας τοῦ δοθέντος ἀριθ-
μοῦ, εἰς τὸν πρῶτον τόπον, τὰς δὲ δεκάδας εἰς τὸν δεύτερον,
ἑκατοντάδας εἰς τὸν τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς γράψαντες, ὅταν

μηδ

μηδεμία δοθῇ μονάς, ἢ δεκάς, ἢ ἑκατοντάς, κτλ, τὸν τόπον αὐτῶν διὰ τοῦ χαρακτῆρος 0 σημειώσαντα ἄρχειν τὸ γράφειν, οἷον φέρ' εἰπεῖν, δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ, τριακόσιαι πεντήκοντα ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια γράφομεν ὧδε 358800.

ζ. Καὶ ἡ ἀνάγνωσις δὲ ὁποιουδήποτε γεγραμμένου ἀριθ: ἀκόπως ἀποκαθίσταται μόνον τὴν δύναμιν ἑκάστου τόπου καλῶς εἰδόσιν. οἷον φέρ' εἰπεῖν δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ, 528734563453000362. ἐπειδὴ καὶ ὁ ἐπὶ τοῦ ἑβδόμου χάρακος 3 ἑβδόμην μονάδα ἤτοι μονάδα τῶν χιλιάδων σημαίνει, ὁ δὲ ἐπὶ τοῦ δεκάτου τόπου, 4. δεκάτην τὴν μονάδα, ἤτοι μονάδα τῶν διχιλιάδων δηλοῖ, ἀναγνώσομεν, πεντακόσιαι εἰκοσιοκτὼ χιλιάδες, καὶ ἑπτακόσιαι τριάκοντα τέσσαρες διχιλιάδες, πεντακόσιαι ἑξήκοντα τρεῖς χιλιάδες, καὶ τετρακόσιαι πεντήκοντα τρεῖς χιλιάδες, καὶ τριακόσια ἑξήκοντα, δύο. πρὸς σαφήνειαν δὲ τῆς ἀναγνώσεως ἀκοπίαν, τὸν ἀναγνωστέον ὑποδιαστέλλομεν ἀριθμόν, ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας ἐκ δεξιῶν ἀρχόμενοι. γράφομεν δὲ καὶ ἐπὶ μὲν τῶν μονάδων τῶν χιλιάδων, πρὸς διάκρισιν μίαν γραμμήν, ἐπὶ δὲ τῶν μονάδων τῶν διχιλιάδων δύο, ἐπὶ τῶν μονάδων τῶν τριχιλιάδων τρεῖς καὶ οὕτως ἐφεξῆς, αὐτὰ πάντα ἑβδόμου χαρακτῆρα ὧδε. 528,734'',563,453',000, 3
362. οἷον δὲ τὰς περισσοτέρας διακρίνοντες μονάδας, εὐκολώτερον τὸν δοθέντα ἀναγνώσομεν ἀριθμόν.

η. Καὶ τοιαύτη μὲν ἐστὶν ἡ παρ' ἡμῖν ἀρίθμησις, οἱ δὲ Γάλλοι ἄλλως πως ἐπιθυμοῦντες ἀναγνώσκειν, παραλλάττουσι δηλ. τοὺς τρεῖς χαρακ-

τὰς τὰς χιλιάδας τῶν χιλιόνων, διχιλιόνων, τριχιλιόνων, καὶ καθ'
ἡμᾶς χαρακτηρίζοντα, ἤτε ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας σύζυγα μεταβαί-
νοντα ὥστε κατὰ αὐτήν, ὁ μὲν τέταρτος τόπος ἐστὶ τῶν χιλιά-
δων, ὁ ἕβδομος, τῶν χιλιόνων, ὁ δέκατος, τῶν διχιλιόνων, ὁ δέκα-
τος τρίτος, τῶν τριχιλιόνων, καὶ οὕτω καθεξῆς. ὅθεν ὁ 5''', 80-
4, 590, 761, 917. κατὰ τὰς γάλλος ἐκδόσεως ἀναγνωσθήσεται,
πέντε τριχιλιόνες, ὀκτακόσιαι τέσσαρας διχιλιόνες, πεντακόσιαι
ἐνενήκοντα χιλιόνες, ἑπτακόσιαι ἑξήκοντα ἕν χιλιάδες, καὶ ἐννεα-
κόσιαι δεκαεπτὰ μονάδες.

§θ. Τὰ μέχρι τοῦδε ῥηθέντα, ὡς μόνοι τοῖς ὁλοσχερῆς καλεῖσθαι ἀνή-
κουσιν ἀριθμοῖς, ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἀπλοϊτικὰς εἰσὶν ἀριθμοὶ, τμή-
ματα μονάδος δηλοῦντα, καὶ διὰ τοῦτο κλασματικοὶ ὀνομαζόμενοι,
ἴδωμεν πῶς οὗτοι, καὶ γράφονται, καὶ ἀναγινώσκονται.

§ι: Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι ὁποιοσδήποτε κλασματικὸς ἀριθμὸς τμήματα
τινὰ μονάδος δηλοῖ, ὅλης ἧς ἀόριστα τέμνεται, ἡ τέμνεται
ὁπόσα τμήματα, καταλαμβάνομεν, ὅτι εἰς ὁποιονδήποτε
κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀνάγνωσιν, ἢ γραφὴν, δύο τινῶν ἀριθ-
μῶν γίνεται χρεία. ὧν ὁ μὲν τὰ λαμβανόμενα τμήματα ἀριθ-
μεῖ, καὶ ἀριθμητὴς ὀνομάζεται, ὁ δὲ τὸ μέγεθος τῶν τῆς
μονάδος τμημάτων παρονομάζει καὶ παρονομαστὴς προ-
σαγορεύεται, ὅθεν καὶ ὀφείλει πρῶτος ἀριθμητικῶς ἀναγινώ-
σκεσθαι, ὁ δὲ δεύτερος τακτικῶς. οὕτω φέρε ὅταν τῆς μονά-
δος εἰς πέντε τμηθείσης τμήματα, τὰ δύο ἐξ αὐτῶν λαμ-
βανόμενα, προφέρομεν τὸν τοιοῦτον κλασματικὸν ἀριθμὸν
δύο πέμπτα, γράφομεν δὲ ὁπωσοῦν ὅταν δύο ἀριθμῶν

ὧδε

ὥστε $\frac{2}{5}$ διακρίνοντες αὐτῆς δηλ. διὰ γραφῆς τινος καὶ τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἐπάνω αὐτῆς, τὸν δὲ παρονομαστὴν κάτωθεν ὑπογεγραμμένα. οὕτω γράφομεν μὲν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτλ., $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, κτλ. ἀναγινώσκομεν δὲ, ἓν δεύτερον, ἢ τὸ δεύτερον, ἓν τρίτον, ἢ τὸ τρίτον, κτλ., δύο τρίτα, τρία τέταρτα κτλ.

Εἰ δὲ καὶ ἡ μονὰς εἰς δέκα, ἢ ἑκατὸν, ἢ χίλια κτλ. τμηθῇ, ἢ τὰ τμήματα ὑποτεθῇ τμήματα, τότε τὰ ἐκ τούτου γενόμενα μέρη δεκαδικὰ κλάσματα μερικώτερον προσαγορεύονται. πρὸς διαφορὰν τῶν ἀνωτέρω, ἅπερ γενικὰ κλασ. καλοῦνται. γράφονται δὲ τὰ δεκαδικὰ οὐ μόνον ὡς τὰ γενικὰ, οἷον $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, κτλ. ἀλλὰ καὶ τὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθ. ἐπιδέχονται γραφήν, περὶ ἧς ἐν οἰκείῳ τόπῳ ῥηθήσεται. ἀναγινώσκονται δὲ καὶ ταῦτα ὡς καὶ τὰ γενικά, ἓν δέκατον, τρία ἑκατοστά, ἑπτὰ χιλιοστὰ κτλ.

14. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλα κλάσ.: παρὰ τοῖς πολλοῖς ἐν χρήσει ὄντα, καὶ διὰ τοῦτο κοινὰ προσαγορευόμενα, ἀλλὰ καὶ ταῦτα, ἢ γράφονται καὶ ἀναγινώσκονται ὡς καὶ τὰ ἀνωτέρω, εἰς πόσα τμήματα ἡ μονὰς διῃρέθη, γινωσκομένου, ἢ γράφεται μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβανομένων τμημάτων, προσπαρασημειοῦται δὲ καὶ τὸ ὄνομα αὐτῶν.

15. Καὶ τοιαύτη μὲν ἡ γραφή, καὶ ἡ ἀνάγνωσις, τοσαῦτα δὲ καὶ τὰ εἴδη τῶν ἀριθ.: ὧν τὰ πάθη, τὰς ἰδιότητας, καὶ τὰς διαφόρους ἀναφοράς, ἡ παροῦσα διδάξει πραγματεία.

Κεφ. 6. Περὶ παθῶν τῶν ἀριθ.

16. Ὁποιονδήποτε ποσὸν καὶ ἑπομένως ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς, δύο τινὰ πάσχει πάθη, ἢ κατ' αὔξησιν δηλ. ἢ κατὰ μείωσιν αὐτῶν μεταβολήν. καθότι ὁ ὁποιοσδήποτε ἀριθ. ἢ αὐξανόμενος μειου-

ὁμοίας μονάδας ταῖς ὁμοίαις προσθῶμεν· ὅθεν τοὺς δοθέντας προσθετέους
ἀριθ: πρῶτον μὲν κατὰ στίχον γράφομεν τὰς ταυτοσήμους μονάδας δηλ: ὑπὸ τὰς
αὐτὰς τιθέντες, εἶτα γραμμήν τινα ὑπογράψαντες πρὸς διάκρισιν τοῦ ζητου-
μένου κεφ: ἀρχόμεθα τῆς προσθέσεως ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων εἰς τὰ
ἀριστερὰ προβαίνοντες, καὶ ὑπὸ τὰς αὐτὰς μονάδας τὸ κατὰ μέρος κεφ:
αὐτῶν ὑποσημειοῦντες, ὅταν δὲ τοῦτο καὶ ἀνωτέρας περιέχῃ μονάδας
ταύτας ταῖς ὁμοίαις συνάπτοντες, ἐκπληροῦμεν τὴν ἐργασίαν.

1. Ἐὰν δοθῶσι φέρ' εἰπεῖν προσθετέοι ἀριθ: ὅ τε 48, ὁ 153, καὶ ὁ 3-
44 γράφω αὐτοὺς ὡς ἐν τῇ (α) ἐργασίᾳ φαίνεται. τὰς μονάδας 48
δηλ: ὑπὸ τὰς μονάδας τὰς δεκάδας ὑπὸ τὰς δεκάδας καὶ οὕτω καθεξῆς. (α) 153
344
εἶτα συνάπτων τὰς πρώτας μονάδας εὑρίσκω $4+3+8=15$, καὶ ἐπει- 545
δὴ τὸ κατὰ μέρος τοῦτο κεφ: πέντε πρώτας μονάδας περιέχει μίαν δὲ δευτέραν,
τὰς μὲν πρώτας εἰς τὸν πρῶτον γράφω τόπον, τὴν δὲ δευτέραν ταῖς δευτέραις προσ-
θεὶς λαμβάνω $1+4+5+4=14$ διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον τὸ μὲν 4 εἰς τὸν
δεύτερον γράφω τόπον, τὸ δὲ ἓν ταῖς τρίταις ἐπισυνάπτων μονάσιν ἔχω
$1+3+1=5$, ὅπερ εἰς τὸν τρίτον γράφω τόπον καὶ οὕτω λαμβάνω $48+$
12 $153+344=545$, ὅπερ τὸ ζητούμενόν ἐστι κεφ: οὕτω δὲ καὶ ὁποσωνδή-
ποτε διδομένων ἀριθ: τὴν πρόσθεσιν ἐκτελοῦντες τὸ ἴσον αὐτοῖς εὑρίσκο-
μεν κεφάλαιον.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

8. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις δὲ ἀριθμητική τις ἐστὶ κατὰ μείωσιν, κατὰ τοῦτο μόνον ἐκείνης
διαφέρουσα, καθότι δι' ἐκείνης μὲν ἡ μείωσις κατὰ μονάδα ἐκτελεῖται. διὰ
δὲ τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ ἀριθμούς. διὰ τῆς δευτέρας δὲ ταύτης τῶν ἀριθμῶν
πράξεως, μανθάνομεν, πῶς ἀριθμός τις ἀφαιρετέος καλούμενος, ἀπὸ ἄλλου
μείζονος ἀφαιρεῖται ἀριθμοῦ, ὅστις μειωτέος προσαγορεύεται. μανθάνομεν δηλ:
πῶς ἡ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται διαφορά, ἥτις καὶ ὑπεροχὴ ὀνο-
μάζεται. ὑπεροχὴ δ.ε.λ., καθ' ἣν ὁ μειωτέος τοῦ ἀφαιρετέου ὑπερέχει.

καὶ λοιπὸν δὲ καλεῖται, καθότι λείπει, τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ μειζοτέρου ἀφαιρεθέντος.

ξ΄. Ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὡρισμένον ἄθροισμα ἐστὶ ποσοτήτων μονάδων, δῆλον, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητηθέντος, ἀνάγκη ἐστίν, ἵνα καὶ ἐνταῦθα τοὺς δοθέντας κατὰ στήλην τάξωμεν. τὸν ἀφαιρετέον δηλ: ὑπὸ τὸν μειζότερον, ὡς καὶ κατὰ τὴν προλαβοῦσαν τῆς προσθέσεως ἐργασίαν εἴδομεν. εἶτα δὲ κατὰ μέρος τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειζοτέρου, τὰς δεκάδας ἀπὸ τῶν δεκάδων, καὶ οὕτω καθεξῆς ἀφαιροῦντες, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον λοιπόν, ἤτε διαφοράν.

ξα΄. Ἐάν φέρ' εἰπεῖν, δοθῶσιν, μειζότερος μὲν ὁ τριακόσια πεντήκοντα ἕξ. ἀφαιρετέος ὁ 124. τάξας αὐτούς, ὡς ἐν τῇ ἐργασίᾳ (6) φαίνε[ται].

(6) 356
124
232. ἀφαιρῶ τὰς μονάδας ἀπὸ τῶν μονάδων καὶ οὕτω λαμβάνω 6−4=2. τοῦτο δὲ τὸ λοιπὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν κατὰ τὸν τόπον γράφω τῶν μονάδων. τὴν αὐτὴν δὲ ἀφαίρεσιν κατὰ μέρος καὶ τῶν δεκάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων ἐκτελέσας, εὑρίσκω 5−2=3, 3−1=2. ταῦτα δὲ κατὰ μέρος ταῦτα λοιπὰ κατὰ τὸν οἰκεῖον γράψας τόπον, λαμβάνω 356−124=232 ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον λοιπόν.

ξβ΄. Ἐὰν δὲ μειζότερος μὲν ὁ 3420. ἀφαιρετέος δὲ ὁ 200 δοθῇ, τούτους γράψας αὐτούς, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἄρχομαι τῆς ἀφαιρέσεως. καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν πρῶτον τόπον, οὐδεμίαν ἀπὸ οὐδεμιᾶς ἀφαιρῶ μονάδος, γράφω 0 κατὰ τὸν τόπον τῶν μονάδων, ἐπειδὴ δὲ καὶ κατὰ τὸν δεύτερον οὐδεμίαν δεκάδα ἀπὸ τοῦ 2 ἀφαιρῶ. γράφω 2 εἰς τὸν δεύτερον τόπον. καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν τρίτον ἔχω 4−2=2 γράφω 2 κατὰ τὸν τρίτον. καὶ κατὰ τὸν τέταρτον τελευταῖον γράφω ὁλόκληρον τὸν 3, ὡς μηδενὸς ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθέντος ἀριθμοῦ, καὶ οὕτως εὑρίσκω 3420−200=3220 ὡς ἐν τῇ (γ) καθορᾶται ἐργασίᾳ. καὶ τοσαύτη ἐστὶν ἡ ζητουμένη διαφορά.

(γ) 3420
200
3220

κη΄. Ὅταν δὲ κατὰ μέρος μονάδας τοῦ ἐλάσσονος ἀριθμοῦ, μείζονες ὦσι τῶν κατὰ μέρος τοῦ μείζονος, τουτέστιν ὅταν ἡ κατὰ μέρος ἀφαίρεσις ἀδύνατος ὑπάρχῃ, τότε ἢ λαμβάνομεν ἀπὸ τῶν πρὸ αὐτῶν μονάδων τοῦ μειωτέου μίαν τινὰ, καὶ ταύτην εἰς δέκα ἀναλύσαντες, ταύτας δὲ ταῖς ἐμπρόσθεν προσθέντες, ἀπὸ τοῦ αὐτῶν καθ: τὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιροῦμεν ἀριθμὸν, ἢ ἁπλῶς προστίθεμεν δέκα μονάδας εἰς τὰς ἐλάσσονας τοῦ μειωτέου, καὶ οὕτω τὰς τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιροῦμεν· ἵνα δὲ ἡ αὐτὴ μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν τηρηθῇ διαφορὰ, προστίθεμεν πάλιν τῷ ἀφαιρετέῳ τὰς αὐτὰς δέκα μονάδας, ἤτοι μίαν δεκαδικὴν εἰς τὰς ἀμέσως ἐξ ἀριστερῶν τῶν ἀφαιρεθησομένων κειμένας, καὶ οὕτως ἐκτελοῦμεν τὴν ἐργασίαν, ὡς ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων δῆλον γίνεται.

δ. ἐὰν γάρ ποτὲ δοθῇ, μειωτέος μὲν ὁ 35861, ἀφαιρετέος δὲ ὁ 6743, τάξας ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἄρχομαι τῆς ἀφαιρέσεως. Καὶ ἐπειδὴ ὁ 3 ἀδύνατος ἀπὸ τοῦ 1 ἀφαιρεθῆναι, ἢ δανείζομαι ἀπὸ τοῦ 6 μίαν δεκάδα, ἢ λαμβάνω ἔξωθεν μίαν, καὶ οὕτως ἔχω $11-3=8$, ὃν εἰς τὸν τόπον γράφω τῶν μονάδων. ἀφαιρῶ ἔπειτα ἢ τέσσαρα ἀπὸ τοῦ 5, ἐὰν δηλ. δανεισθῶ ἀπὸ τοῦ 6 μίαν δεκάδα, καὶ οὕτως εὑρίσκω $5-4=1$, ἢ ἀφαιρῶ 5 ἀπὸ τοῦ 6 ἐὰν δηλ. λάβω μίαν δεκάδα ἔξωθεν, τουτέστι συναφαιρῶ καὶ τὴν ἔξωθεν ληφθεῖσαν ταύτην δεκάδα προστιθεὶς αὐτὴν τῷ 4, ἵνα ἡ τῶν δοθέντων διαφορὰ καθόλου μεταβληθῇ, καὶ οὕτως ἔχω πάλιν $6-5=1$, εὑρίσκω δὲ καὶ $8-7=1$ καὶ $15-6=9$, ἢ δανεισθεὶς δηλ. μίαν τῶν χιλιάδων δεκάδα ἀπὸ τοῦ 3, ἢ ἔξωθεν αὐτὴν λαβὼν καὶ ἐὰν μὲν τὸ πρῶτον πράξω, δῆλον ὁ 3 εἰς 2 μεταβάλλεται, ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον τὴν ἔξωθεν ληφθεῖσαν ἀπὸ τοῦ 3 ἀφαιρῶν, εὑρίσκω κατὰ μέρος λεῖπον τὸ 2, τοῦ, τουτέστι τὰ μερικὰ λείποντα εἰς τὸν οἰκεῖον γράψαι τόπον, ἔξω

$35861 - 6743 = 29118$, ὡς ἐν τῇ (δ) ἐργασίᾳ δῆλον

(δ) 35861 / 6743 / 29118. ὑποκαθίζω.

(δ)

35861
6743
29118

ηια'. Δοθέντος δὲ τοῦ 60000 μειωτέου, καὶ τοῦ 34542 ἀφαιρετέου, ἀρχόμενος τῆς ἀφαιρέσεως βλέπω, ὅτι ἐπειδὴ ὁ 2, ἀπὸ τοῦ 0 ἀφαιρεῖ, καὶ ἐπειδὴ μόνος ὁ πέμπτος τόπος τὸν 6 ἔχει ἀριθμὸν, λαμβάνω ἐξ αὐτοῦ μίαν μονάδα τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, ταύτην δὲ εἰς δέκα ἐπομένως ἀναλύσαι· ἐκ δὲ τούτων μίαν μόνην λαβὼν, καὶ εἰς δέκα ἐπομένως ἀναλύσαι καὶ οὕτως ἐφεξῆς ποιῶν, κατὰ τοῦ τελευταίου μέχρι τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ὅθεν τὴν κατὰ μέρος ἐκτελῶν ἀφαίρεσιν λαμβάνω, $10-2=8$, $9-4=5$, $9-5=4$, $9-4=5$, $5-3=2$,

ἢ μίαν δεκάδα εἰς ἕκαστον προστίθημι τόπον τοῦ μειωτέου ἀριθμοῦ ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐδόθη, ταύτην δὲ πάλιν, μετὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ὑπὸ τοῦ μειωτέου συναφαιρῶ, καὶ οὕτω φυλάττων τὴν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν διαφορὰν ἀμετάβλητον ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν. Οὕτω δὲ πάλιν εὑρίσκω $10-2=8$, $10-5=5$, $10-6=4$, $10-5=5$, $6-4=2$

ταῦτα δὲ τὰ κατὰ μέρος λοιπὰ, εἰς τὸν οἰκεῖον γράψας τόπον, εὑρίσκω

(α) 60000 / 34542 / 25458. $60000 - 34542 = 25458$, ὡς ἐν τῇ (α) ἐργασίᾳ δῆλον γίνε.

ηιβ'. Καὶ ταῦτα μὲν οὕτω καὶ ὅλως ἐκτελοῦνται τὰ δύο κυριώτερα τῶν ἀριθμῶν πάθη, ἐὰν δὲ καὶ περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν τοιούτων ἐργασιῶν βεβαιωθῆναι βουληθῶμεν, διὰ τῶν ἑξῆς παρατηρήσεων βασανίσαι αὐτὰς δυνάμεθα. καὶ πρῶτον ἐπειδὴ κατὰ τὴν πρόσθεσιν τὸ εὑρεθὲν κ.φ. ὡς ὅλον, πάντας τοὺς προτεθέντας περιέχει ἀριθμοὺς, δῆλον, ὅτι ἐὰν πάντας αὐτοὺς ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τοῦ κ.φ. μηδὲν ἐπειδὰν [illegible] λείψανον, εἰ ἀκριβῶς ἡ πρόσθεσις ἐγένετο.

δεύτερον ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸ λεῖπον ἡ ὑπεροχὴ
ἐστὶ, καθ' ἣν ὁ μείζων τοῦ ἀφαιρετέου ὑπερέχει· δῆλον ὅτι, τῆς
ἐργασίας ἀκριβῶς ἐκτελεσθείσης ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸ λεῖπον
προστεθῇ, ὁ μείζων ἐξαχθήσεται. ὅθεν μανθάνομεν ὅτι τῆς μὲν
προσθέσεως ἡ βάσανος διὰ ἀφαιρέσεως, τῆς δ' ἀφαιρέσεως διὰ προ-
σθέσεως γίνεται.

Τῷ φέρ' εἰπεῖν, ἐὰν τὸ τῆς (α) ἐργασίας, (18) θελήσω βασανίσαι πα-
ράδειγμα, ἵνα τὴν κατ' αὐτὸ βάσανον ἀσφαλέστερον ἐκτελέσω, προτίθημι
κατὰ μέρη τὰς στήλας ἐξ ἀριστερῶν εἰς τὰ δεξιὰ βαίνων, ἀφαιρῶν δὲ κατὰ
μέρος τὸ αὐτῶν κεφ: ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τὴν στήλην ἀριθμοῦ κ.φ. ἐὰν 0
ἐγκαταλειφθῇ λεῖπον, βεβαιοῦμαι, ὅτι ἀληθής ἐστιν ἡ ἐργασία. τοιαύτας δὲ
προσθέσεις, καὶ ἀφαιρέσεις ἐκτελῶν, εὑρίσκω $3+1=4$, ὅστις ἐν τῷ 5 ἀ-
φαιρεθεὶς 1 ἐγκαταλείπει ἀριθμόν, τοῦτον δὲ τῷ 4 προτάξας, καὶ ἀπὸ τοῦ
14 τὸν $4+5+4=13$ ἀφελών, εὑρίσκω λεῖπον τὸν 1, ὃν τῷ 5 ὑπο-
τάξας προτάξας, καὶ ἀπὸ τοῦ 15 τὸν $8+3+4=15$ ἀφελών, λαμβάνω
λεῖπον 0, ὅθεν βεβαιοῦμαι, ὅτι ἀκριβῶς ἡ ῥηθεῖσα ἐξετελέσθη ἐργασία.
κη Ὡσαύτως τὸ τῆς (β) παραδ: (21) διὰ προσθέσεως βασανίσαι
θελήσω, εὑρίσκω $2+4=6$, $3+2=5$, $2+1=3$, ὅθεν βεβαι-
οῦμαι, ὅτι ἀληθής ἐστιν ἡ ἐργασία αὕτη, ἐὰν δὲ τὴν αὐτὴν ἐργασίαν,
καὶ διὰ ἀφαιρέσεως βασανίσαι θελήσω, διὰ τῆς ἑξῆς παρατηρήσεως τοῦτο
πρᾶξαι δυνήσομαι. ἐπειδὴ καὶ ὁ μείζων ἀριθμὸς τῷ ἀφαιρετέῳ καὶ
τῷ λείποντι ἴσος ἐστί, δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ τὸ λεῖπον ἀφαιρεθῇ, ὁ ἀφαι-
ρετέος ἐξαχθήσεται. ὅθεν λοιπὸν τὸ λεῖπον ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρῶν,
εὑρίσκω $6-2=4$, $5-3=2$, $3-2=1$, ὅθεν βεβαιοῦμαι ὅτι ἀκρι-
βής ἐστιν ἡ ῥηθεῖσα ἐργασία. καὶ ταῦτα μὲν εἰς τὰ γενικώτερα τῶν ἀριθ-
μητικῶν πάθη, τὰ δὲ λοιπὰ μερικώτερά τινα ὑπάρχουσιν, εἰς τὰ δύο ταῦτα
ὑπαγόμενα, ὡς ἐκ τῶν ἑξῆς δῆλον γίνεται. Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ
κθ: Διὰ τῆς προσθέσεως ἐμάθομεν (17) πῶς ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ

ὅς ἂν συνάπτοντα κ.τ.φ. πάντα περιέχον τὰς δοθέντας, ἐὰν δὲ οἱ δοθέντες προστιθέμενοι ταὐτὸν, δῆλον ὅτι ἐκείνου πάντες αὐτὸ περιέξει τὸ ἄθροισμα κ.τ.φ. ἀλλὰ καὶ ἑκάστου καθὰ μέρος πολλαπλάσιον ἔχει. καὶ ἐπὶ δύο μὲν τῶν προστεθέντων δοθέντων, διπλάσιον ἑκατέρου ἔσεται τὸ αὐτῶν κ.τ.φ. τριῶν δὲ, τριπλάσιον ἑκάστου καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ἡ τοιαύτη λοιπὸν τῆς προσθέσεως μερικωτέρα ἐργασία, διπλασιασμὸς, τριπλασιασμὸς, καὶ ἐν γένει πολλαπλασιασμὸς προσηγορεύθη. ὅθεν καὶ διά τινων μερικωτέρων σημείων ὑποσημαίνεται, ἅτινά εἰσι τὰ ×, ·, ( ) καὶ διὰ τῆς ἐπὶ ἀναγινώσκονται. ὅταν λοιπὸν γράφω $2 \times 3 = 6$, $2 \cdot 3 = 6$, $(2)(3) = 6$ ἐννοῶ, ἢ ὅτι ὁ 2 προστίθεται τρίς, καὶ ἰσοδυναμεῖ τὸ $2+2+2=6$, ἢ ὁ τρία συνάπτεται δίς καὶ ἰσοδυναμεῖ τὸ $3+3=6$ ἀναγινώσκοντες 2 ἐπὶ τὸ 3 ἴσον ἕξ.

§ λ. Ἐκ τούτων λοιπὸν μανθάνομεν, ὅτι πολλαπλασιασμὸς πρόσθεσίς τις ἐστι, πρόσθεσις ὅμως σύντομος, δι' ἧς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δίς, τρίς, πολλάκις προστίθεται, καὶ ὁ μὲν πολλάκις προστιθέμενος, ἤτοι πολλαπλασιαζόμενος πολλαπλασιαστέος καλεῖται. ὁ δὲ ποσάκις ἐκεῖνος προστίθεται δηλῶν, πολλαπλασιαστὴς προσαγορεύεται. τὸ δὲ ἄθροισμα διπλάσιον, τριπλάσιον ἐν γένει πολλαπλάσιον κ.τ.φ. γινόμενον ὀνομάζεται. ἀμφότεροι δὲ ὅ,τε πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος παράγοντες λέγονται. ὥστε ἐπὶ τῷ $2 \cdot 3 = 6$ ἐὰν ἐννοῶ, ὅτι ὁ 2 μὲν προστίθεται, ὁ δὲ 3 τὸ ποσάκις δηλοῖ, ὁ μὲν δύο ὁ πολλαπλασιαστέος ἐστί, ὁ δὲ τρία ὁ πολλαπλασιαστὴς, ἀμφότεροι δὲ παράγοντες, καὶ ὁ 6 τὸ ἐξ αὐτῶν παραγόμενον, ἤτοι γινόμενον.

§ λα. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς, διὰ τῶν ἐννέα παριστᾶται χαρακτήρων καὶ διὰ τοῦ 0 δῆλον ὅτι, ἐὰν πάντα τὰ δι' αὐτῶν κατὰ μέρος γινόμενα, διὰ μνήμης φέρωμεν ἑκάστου ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, τὴν πολλαπλάσιον ποσότητα προσθέσεων, ἤτοι ἑκάστου, ὁποιονδήποτε πολλαπλασιάσομεν ἀριθμόν.

ἐκ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχόμενοι ἐς τὰ δυσκερέστερα προβαίνοντες, παρατη-
ρῶμεν πρῶτον, ὅτι $0 \cdot 0 = 0$ τουτέστιν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ μηδενὸς

$0 \cdot 1 = 0$

$0 \cdot 2 = 0$

πολλαπλασιαζόμενος ἢ τὸ · μηδόλως προστιθέμενος μηδὲν δίδωσι διδόμενον

ὅτι

$1 \cdot 1 = 1$

$1 \cdot 2 = 2$ τουτέστιν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς μονάδος πολλαπλασιαζόμενος

$1 \cdot 3 = 3$

ἢ τὰ ἅπαξ λαμβανόμενος ἴσον ἑαυτῷ παράγει γινόμενον

ὅτι

$2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$

$2 \cdot 3 = 4 + 2 = 6$

$2 \cdot 4 = 6 + 2 = 8$

$2 \cdot 5 = 8 + 2 = 10$

$2 \cdot 6 = 10 + 2 = 12$

$\cdot 7 = 12 + 2 = 14$

$\cdot 8 = 14 + 2 = 16$

$\cdot 9 = 16 + 2 = 18.$

$\cdot 3 = 3 + 3 = 3 = 9$

$\cdot 4 = 9 + 3 = 12$

$3 \cdot 5 = 12 + 3 = 15$

$3 \cdot 6 = 15 + 3 = 18$

$3 \cdot 7 = 18 + 3 = 21$

$3 \cdot 8 = 21 + 3 = 24$

$= 24 + 3 = 27$

$+ 4 + 4$

$4 \cdot 4 = 4 + 4 = 16.$

$4 \cdot 5 = 16 + 4 = 20$

$4 \cdot 6 = 20 + 4 = 24$

$4 \cdot 7 = 24 + 4 = 28$

$4 \cdot 8 = 28 + 4 = 32$

$4 \cdot 9 = 32 + 4 = 36.$

[illegible]

$5 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 \overset{+5}{} = \cancel{15} - 25$

$5 \cdot 6 = 25 + 5 = 30$

$5 \cdot 7 = 30 + 5 = 35$

$5 \cdot 8 = 35 + 5 = 40$

$5 \cdot 9 = 40 + 5 = 45$

[illegible]

$6 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36 = \left(\frac{367656923}{76405} - 8974 \right)$

$6 \cdot 7 = 36 + 6 = 42$

$6 \cdot 8 = 42 + 6 = 48$

$6 \cdot 9 = 48 + 6 = 54$

[illegible]

$7 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49$

$7 \cdot 8 = 49 + 7 = 56$

$7 \cdot 9 = 56 + 7 = 63$

[illegible]

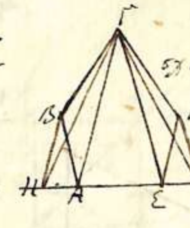
$8 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64$

$8 \cdot 9 = 64 + 8 = 72$

[illegible]

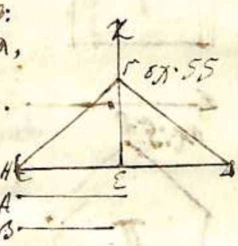
$9 \cdot 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + \cancel{9} + 9 = 81$

τῆς δὲ ΔΕ ἑκατέρωθεν ἐκβληθείσης, καὶ τῶν ΓΗ, ΓΖ ἐπιζευχθεισῶν, τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἰσότιμον τῷ ΓΕΖ, τὸ δὲ ΑΒΓ, τῷ ΑΓΗ ἔσεται, ὡς ἔχοντα τὰ αὐτὰ ὕψη, καὶ τὰς αὐτὰς βάσεις· ὅθεν καὶ τὸ δοθὲν πολύγωνον ἰσότιμον τῷ τριγώνῳ ΗΓΖ ἔσται. ὡσαύτως δὲ καὶ ὁποιονδήποτε ἕτερον πολύγωνον ἰσότιμον τριγώνῳ μετατρεφθήσεται, ἐπειδὴ δὲ καὶ παντὸς τριγώνου ἰσότιμον τετράγωνον εὑρεῖν δυνατὸν (§. 266), ἔπεται, ὅτι καὶ παντὸς πολυγώνου ἰσότιμον τετράγωνον εὑρεθήσεται. Ἡ δὲ τοιαύτη τῶν πολυγώνων ἀναγωγὴ τετραγωνισμὸς αὐτῶν ὀνομάζεται, ἀπορητικῶς δὲ καὶ κύκλον τετραγωνίσαι λέγεται, τὸ τετράγωνον ἰσότιμον αὐτῷ, ὃ δυνατὸν εὑρεῖν.



σχ. 54

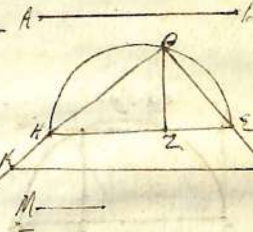
§271: Τετράγωνον κατασκευάσαι ἴσον τῷ κ.φ. ἢ τῇ διαφορᾷ δύο τετραγώνων, ὧν αἱ Α, Β δίδονται πλευραὶ (σχ: 55), ἐὰν μὲν ζητηθῇ τὸ τετράγωνον ἰσότιμον τῷ κ.φ. τῶν δοθέντων τετραγώνων. τῶν ΕΖ, ΕΔ, καθέτως ἀχθεισῶν, καὶ τῆς μὲν ΕΔ = Α, τῆς δὲ ΕΓ = Β ληφθείσης, καὶ τῆς ΓΔ ἐπιζευχθείσης, τὸ ἀπὸ ταύτης τετράγωνον τὸ ζητούμενον ἔσται (211), ἐὰν δὲ ἴσον τῇ διαφορᾷ ζητηθῇ, τῶν ΕΖ, ΕΗ καθέτως ἀχθεισῶν, καὶ τῆς ΓΕ ἴσης τῇ ἐλάσσονι τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ληφθείσης, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΗ ἴσῳ τῇ λοιπῇ δοθείσῃ πλευρᾷ, τόξου τινὸς γραφέντος, τὴν ΕΗ κατὰ τὸ σημεῖον τὸ Η τέμνοντος, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, τὸ ζητούμενον ἔσται τετράγωνον (218).



σχ. 55

§272: Τετράγωνον κατασκευάσαι λόγον ἔχον πρὸς ἕτερον δοθὲν τετράγωνον, ὃν ἡ δοθεῖσα Μ εὐθεῖα πρὸς τὴν δοθεῖσαν Π (σχ: 56). ἐπὶ τῆς ἀορίστου εὐθείας ΗΕ, τῆς μὲν ΖΕ = Μ ληφθείσης, τῆς δὲ ΖΗ = Π, καὶ ἐπὶ τῆς ὅλης ΗΕ ὡς ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἡμιπεριφερείας ΗΘΕ γραφείσης, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Ζ τῆς καθέτου ΖΘ ἀναχθείσης, τῶν δὲ χορδῶν ΗΘ, ΕΘ ἀχθεισῶν, καὶ ἐκβληθεισῶν, καὶ τῆς Θκ = ΑΒ ληφθείσης, ἢ πλευρᾷ δηλ: τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ διὰ τοῦ κ τῆς κΙ παραλλήλου τῇ ΕΗ ἀχθείσης, τὸ ἀπὸ τῆς ΘΙ τὸ ζητούμενον ἔσται τετράγωνον. ἐπειδὴ καὶ ΘΙ : Θκ :: ΘΕ : ΘΗ (232), ἔσεται καὶ $\overline{ΘΙ}^2 : \overline{Θκ}^2 :: \overline{ΘΕ}^2 : \overline{ΘΗ}^2$, ἀλλὰ $\overline{ΘΕ}^2 : \overline{ΘΗ}^2 :: ΖΕ : ΖΗ$ (221), ἤτοι $\overline{ΘΕ}^2 : \overline{ΘΗ}^2 :: Μ : Π$, ὥστε ἔσεται καὶ $\overline{ΘΙ}^2 : \overline{Θκ}^2 :: Μ : Π$. τουτ. $\overline{ΘΙ}^2 : \overline{ΑΒ}^2 :: Μ : Π$

σχ. 56



§273: Ἐπὶ τῆς ΗΖ ὁμολόγου πλευρᾶς τῇ ΑΒ πολύγωνον καταγράψαι τῷ δοθέντι πολυγώνῳ ΑΔ ὅμοιον (σχ: 57), ἀχθεισῶν τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, καὶ πρὸς μὲν τῷ Ζ τῆς γωνίας ΗΖΘ = ΒΑΓ κατασκευασθείσης (183), πρὸς δὲ τῷ Η τῆς ΖΗΘ = ΑΒΓ, ἔσεται τὸ τριγ: ΖΗΘ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ὡσαύτως δὲ καὶ τοῦ ΖΘΙ ὁμοίου τῷ ΑΓΔ κατασκευασθέντος, καὶ τοῦ ΖΙΚ τῷ ΑΕΔ, καὶ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ ἔσεται. (247)

σχ. 57

§274: Δύο ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων δοθέντων, σχῆμα καὶ ὅμοιον αὐτοῖς, καὶ ἴσον τῷ κ.φ. ἢ τῇ αὐτῶν διαφορᾷ εὑρεῖν. ὑποτεθεισῶν Α, Β δύο ὁμολόγων τῶν δοθέντων σχημάτων πλευρῶν, καὶ τετραγ: εὑρεθέντος ἴσου τῷ κ.φ. ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων (271), τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἢ κατασκευασθὲν, ὅμοιον τοῖς δοθεῖσι σχῆμα, τὸ ζητούμενον ἔσται.

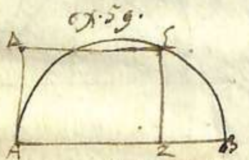
καθότι, ἐπειδὴ καὶ τὰ ὅμοια σχήματα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (248), ἔτι δὲ τὸ ἀπὸ τῆς φ τετράγ: ἴσον τῷ κ:φ: ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ὥστε καὶ τὸ ἐπὶ τῆς φ κατασκευασθὲν τοῖς δοθεῖσιν ὅμοιον σχῆμα, καὶ ἴσον τῷ κ:φ: ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἔσεται.

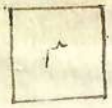
§275: Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι ὅμοιον σχῆμα κατασκευάσαι, λόγον ἔχον πρὸς τὸ δοθὲν, ὃν καὶ ἡ Μ εὐθεῖα πρὸς τὴν π, ὑποτεθείσης Α πλευρᾶς τινος τοῦ δοθέντος σχήματος, καὶ εὑρεθέντα τετραγ: λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου, ὃν ἡ Μ πρὸς τὴν π (272), τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς φ τοῦ εὑρεθέντος τετραγώνου κατασκευαζόμενον, ὅμοιον τῷ δοθέντι σχῆμα, τὸ ζητούμενον, ἔσται. καθότι, ἐπειδὴ $\overline{\varphi}^2 : \overline{A}^2 :: M : \pi$, τὰ δὲ ὅμοια σχήματα, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἔσεται καὶ τὸ ἐπὶ τῆς φ κατασκευασθὲν ὅμοιον τῷ δοθέντι σχῆμα πρὸς αὐτὸ τὸ δοθὲν ὡς $M : \pi$.

σχ:58

§276: Εὐθύγραμμον σχῆμα κατασκευάσαι ὅμοιον μὲν τῷ π, ἴσον δὲ τῷ ρ (σχ: 58). Εὑρεθείσης τῆς πλευρᾶς Μ τοῦ ἰσουμένου τῷ π τετραγώνου (270), καὶ τῆς πλευρᾶς Σ τοῦ ἰσουμένου τῷ ρ, καὶ ληφθείσης τῆς φ τετάρτης ἀναλόγου ταῖς Μ, Σ, ΑΒ τὸ ἐπὶ τῆς φ κατασκευαζόμενον ὅμοιον τῷ π σχῆμα, τὸ ζητούμενον ἔσται. καθότι, ὑποθέντες αὐτὸ χ, ἕξομεν $\pi : \chi :: \overline{AB}^2 : \overline{\varphi}^2$, ἀλλὰ καὶ $M : \Sigma :: AB : \varphi$, καὶ $\overline{M}^2 : \overline{\Sigma}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{\varphi}^2$, ὥστε ἔσεται καὶ $\pi : \chi :: \overline{M}^2 : \overline{\Sigma}^2$, ἔτι δὲ $\overline{M}^2 = \pi$, καὶ $\overline{\Sigma}^2 = \rho$. ὅθεν ἔσεται καὶ $\pi : \chi :: \pi : \rho$, δηλ: $\chi = \rho$.

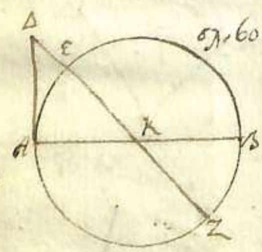
σχ:59.

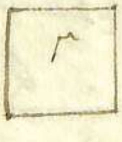




§277: Ὀρθογώνιον κατασκευάσαι ἴσον μὲν δοθέντι τετραγώνῳ τῷ f, ἔχον δὲ τὸ κ:φ: τῶν προσκειμένων αὐτῷ πλευρῶν, ἤτε τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, (σχ: 59). Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕΒ γραφείσης, καὶ τῆς ΑΔ ἴσης τῇ πλευρᾷ τοῦ δοθέντος ληφθείσης, καὶ τῆς ΔΕ διὰ τοῦ Δ παραλλήλου τῇ ΑΒ ἀχθείσης, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Ε καθ' ὃ ἡ παράλληλος τὴν περιφέρειαν τέμνει τοῦ κύκλου, τῆς ΕΖ καθέτου καταχθείσης, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ὀρθογώνιον τὸ ζητούμενον ἔσται. καθότι ἕξομεν $AZ \cdot BZ = \overline{EZ}^2 = \overline{A\Delta}^2 = f$. δῆλον δὲ ὅτι ἀνάγκη ἐστὶ τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου, ἤτε τὴν ΑΔ ἐλάσσονα τῆς ἡμιδιαμέτρου εἶναι. καθότι ἄλλως τὸ πρόβλημα ἀδύνατόν ἐστι.

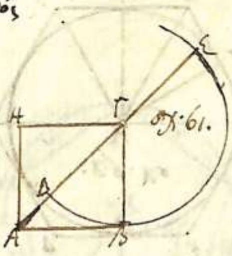
σχ:60.





§278: Ὀρθογώνιον κατασκευάσαι, ἰσόπλευρον μὲν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ f, ἔχον δὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ (σχ:60). Ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ὡς ἐπὶ διαμέτρου τῆς περιφερείας ΑΕΒΖ γραφείσης, καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΔ ἴσης τῇ πλευρᾷ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ληφθείσης, καὶ τῆς τεμνούσης ΔΕΚΖ ἀχθείσης, τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΔΕ ὀρθογώνιον τὸ ζητούμενον ἔσται. καθότι ἕξομεν $\Delta E \cdot \Delta Z = \overline{A\Delta}^2 = f$, (253).

§279: κοινὸν μέτρον, εἰ δυνατόν, τῆς διαγωνίου Αf, καὶ τῆς πλευρᾶς fΒ τετραγώνου τοῦ ΒΗ εὑρεῖν. (σχ:61). Τῆς Αf διὰ τῆς Βf μετρηθείσης, ἤτε κέντρῳ τῷ f διαστήματι δὲ τῷ Βf τῆς ἡμιπεριφερείας εΒΔ γραφείσης, δῆλον ὅτι ἡ πλευρὰ Βf ἅπαξ ἐν τῇ διαγωνίῳ περιέχεται, μείζω δὲ τῆς ἐλάσσονος ἡ ΑΔ. τ.ἐ.: ἡ διαγώνιος ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ἀναφερομένη ἔσεται $1+\frac{ΑΔ}{ΒΓ}$, ἤτοι $1+\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$, καὶ ΑΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΕ (253), ἤτοι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΒ}{ΑΕ}$, ἡ διαγώνιος ἔσεται $1+\frac{ΑΒ}{ΑΕ}=1+\frac{1}{2+\frac{ΑΔ}{ΑΒ}}$, τῆς ἀναφορᾶς δὲ $\frac{ΑΒ}{ΑΕ}$ ἀντὶ τῆς $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ κατὰ συνεχῆ ἀντικαθισταμένης, εὑρίσκεται ἡ διαγώνιος ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ἀναφερομένη ἐν τῷ κλάσματι $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$ οὗτινος τέσσαρες μόνοι ληφθέντες ὅροι δόσουσι $\frac{41}{29}$, ἐξ οὗ δῆλον γίνεται, ὅτι ἡ διαγώνιος ἔχει πρὸς τὴν πλευρὰν ὡς 41 : 29 ὡς ἔγγιστα, ἐὰν δὲ καὶ ἄλλους ὅρους τοῦ κλάσματος συνάγωμεν, μᾶλλον εἰς τὴν ἀληθῆ ἀναφορὰν προσεγγίσομεν.



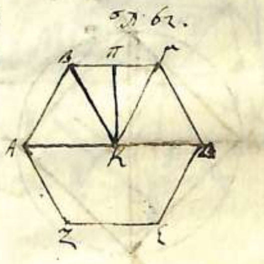
σχ: 61.

Περὶ Κανονικῶν Πολυγώνων, ἐπὶ τῇ τοῦ κύκλου ἀναμετρήσει θεωρουμένων

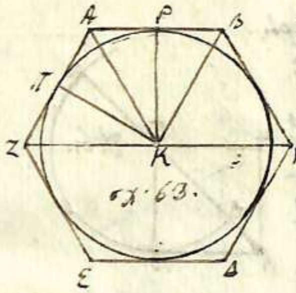
§280: Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἰσαρίθμους τὰς πλευρὰς ἔχοντα, ὅμοια ἀλλήλοις εἰσί. καθότι καὶ αἱ γωνίαι ἀμφοτέρων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἀνάλογον, ἐπειδὴ καὶ πᾶσαι αἱ πλευραὶ θατέρου πολυγώνου ὡς ἴσαι ἀλλήλαις οὖσαι, ἐξ ἴσου περιέχουσι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἴσας οὔσας. ὅθεν καὶ αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς δύο τινὲς αὐτῶν πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ ἐξ αὐτῶν τετράγωνα (248).

§281: Ὁποιονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἐν κύκλῳ ἐγγράψαι, καὶ περιγράψαι δυνατόν. καθότι περιγραφέσθω διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, (σχ: 62) κανονικοῦ πολυγώνου τὸ ΑΕ διαχθέντι (292), ἀπὸ δὲ τοῦ αὐτοῦ κέντρου Κ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ, πρὸς δὲ καὶ τῆς καθέτου ΠΚ ἀχθεισῶν, ἐὰν καὶ ἡ ΔΚ ἀχθῇ, ἴση τῇ ΑΚ ἔσεται. τ.ἐ. ἡ διὰ τῶν Α, Β, Γ ἀχθεῖσα περιφέρεια καὶ διὰ τοῦ Δ διελεύσεται. ἐπειδὴ καὶ ἐν τοῖς τετραπλεύροις ΑΠ, ΔΠ, ἡ μὲν ΚΠ κοινή ἐστιν, ἡ ΒΠ = ΓΠ, ἡ γωνία Β = Γ, καὶ ἡ ΑΒ = ΓΔ, δῆλον ὅτι τὰ τοιαῦτα τετράπλευρα ἀλλήλοις ἐφαρμόσουσι, καὶ ἐπομένως ἡ ΑΚ = ΔΚ ἔσται. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, ὅτι ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ διέρχεται, τ.ἐ. τὸ πολύγωνον ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἔσεται. ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν ἴσαι χορδαὶ οὖσαι, ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἀφίστανται, ἔσεται, ὅτι ἡ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΠ γραφομένη περιφέρεια, πασῶν τῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐφάψεται πλευρῶν κατὰ τὰ μέσα τούτων σημεῖα. τ.ἐ.: ἡ τοιαύτη περιφέρεια ἐν τῷ δοθέντι κανονικῷ πολυγώνῳ ἐγγεγραμμένη ἔσεται.

σχ: 62.

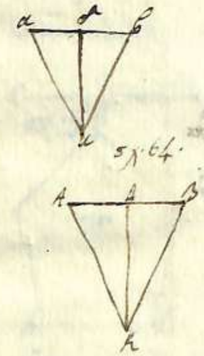


§282: Τὸ κοινὸν κέντρον Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου, καὶ περιγεγραμμένου κύκλου ὡς κέντρον καὶ τοῦ πολυγώνου ὑπολαμβάνεται. καὶ ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, &c. ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δῆλον, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅθεν ἐὰν τέσσαρας ὀρθὰς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπικέντρων διέλωμεν γωνιῶν, ἑκάστην τούτων προσδιορίσομεν.



σχ. 63.

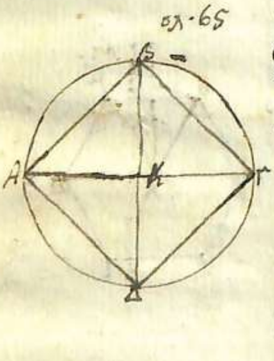
§283: Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου, οἷον τοῦ ΑΔ (σχ:63) ἴση ἐστὶ τῇ αὐτοῦ περιμέτρῳ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσῃ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΚ, μέτρον ἔχει τὸ $\frac{AB\cdot KP}{2}$, τὸ δὲ ΑΖΚ τὸ $\frac{AZ\cdot ΠK}{2}$, καὶ οὕτω καθεξῆς (202), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἔσεται $(AB+BΓ+ΓΔ+\text{κτλ})\frac{KP}{2}$, δῆλον δὲ ὅτι ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡμιδιάμετρος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου μέχρι τινὶ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν καταγομένη καθέτῳ ταυτίζεται· ἡ δὲ τοιαύτη κάθετος καὶ ἀπόθεμα τοῦ πολυγώνου ὀνομάζεται. (ἤγουν ἀπόστημα τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου (α))



σχ. 64.

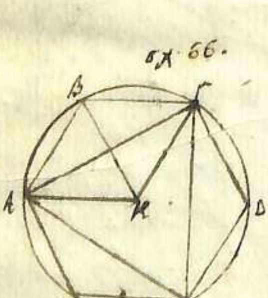
§284: Αἱ περίμετροι τῶν ἰσαρίθμους πλευρὰς ἐχόντων κανονικῶν πολυγώνων πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι τῶν ἐγγεγραμμένων, ἢ περιγεγραμμένων κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ αὐτῶν τετράγωνα· Καθότι ὑποτεθέντων ΑΒ, αβ (σχ:64) τῶν πλευρῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων, Κ, κ τῶν κέντρων αὐτῶν, ΑΚ, ακ τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, ΔΚ, δκ τῶν ἐγγεγραμμένων, ἐπειδὴ καὶ ΑΒΚ ἰσογώνιον καὶ ἑπομένως ὅμοιον τῷ αβκ ἐστίν, ἕξομεν $AB:αβ::AK:ακ::ΔK:δκ$, καὶ ἑπομένως $\overline{AB}^2:\overline{αβ}^2::\overline{AK}^2:\overline{ακ}^2::\overline{ΔK}^2:\overline{δκ}^2$, ἀλλ᾽ αἱ μὲν περίμετροι τῶν πολυγώνων πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΑΒ, αβ, αἱ δὲ ~~αι~~ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ τοῦ $\overline{AB}^2, \overline{αβ}^2$ (280), ὥστε αἱ αὐταὶ περίμετροι ἔσονται πρὸς ἀλλήλας ὡς $AK:ακ$, ἢ ὡς $ΔK:δκ$, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς $\overline{AK}^2:\overline{ακ}^2$, ἢ ὡς $\overline{ΔK}^2:\overline{δκ}^2$.

Προβλήματα



σχ. 65

§285: Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ΑΒΓΔ (σχ:65) τετράγωνον ἐγγράψαι· Τῶν διαμέτρων ΑΓ, ΒΔ καθέτως ἀχθεισῶν, καὶ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἐπιζευχθέντων, τὸ ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον ἔσται τετράγωνον· Καθότι τῶν γωνιῶν Κ ἴσων οὐσῶν, καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ~~Β~~ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἴσαι ἔσονται, ἀλλὰ δὲ καὶ αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ ὀρθαί, ὥστε τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἔσται, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΚ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές ἐστί, γενήσεται $\overline{BΓ}^2:\overline{BK}^2::2:1$, καὶ $BΓ:BK::\sqrt{2}:1$, τουτέστι ἡ πλευρὰ παντὸς ἐγγεγραμμένου τετραγώνου πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐστίν, ὡς $\sqrt{2}:1$



σχ. 66.

§286: Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ΑΓΕ (σχ:66) ἑξάγωνον, καὶ τρίγωνον κανονικὸν ἐγγράψαι· Ὑποτεθείσης ΑΒ ~~τῆς~~ πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου ἑξαγώνου, καὶ ἀχθεισῶν τῶν ἡμιδιαμέτρων, ΑΚ, ΒΚ, ἡ γωνία ΑΚΒ τὸ ἕκτον ἔσεται 4 ὀρθῶν. ἤτοι $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (282), καὶ ἑπομένως αἱ δύο λοιπαὶ τοῦ τριγώνου γωνίαι ἔσονται $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστίν, ἑκατέρα ἔσεται $\frac{2}{3}$. τουτέστι τὸ τρίγωνον ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὅθεν καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἑξαγώνου ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἔσεται τοῦ κύκλου, ὥστε ἐὰν ἑξάκις τὴν ἡμιδιάμετρον ἐπὶ τῆς περιφερείας μεταφέρωμεν, τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον ἀποτελοῦμεν, ἐὰν δὲ καὶ ἐναλλὰξ τὰς γωνίας τούτου ἐνώσωμεν, τὸ κανονικὸν τρίγωνον ΑΓΕ κατασκευάσομεν.

§287: Ἐπειδὴ δὲ καὶ $AB=ΓK=AK=BΓ$ ἐστί, γενήσεται $\overline{AΓ}^2+\overline{BK}^2=\overline{AB}^2+\overline{ΓK}^2+\overline{AK}^2+\overline{BΓ}^2=4\overline{ΓK}^2=4\overline{BK}^2$ (226) καὶ ἑπομένως $\overline{AΓ}^2=3\overline{BK}^2$, ὅθεν ἕξομεν $\overline{AΓ}^2:\overline{BK}^2::3:1$, ἤτοι $AΓ:BK::\sqrt{3}:1$, τουτέστι ἡ πλευρὰ τοῦ ~~ἐγγεγραμμένου~~ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ τριγώνου ἔχει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ περιγεγραμ

(α) ἀπόστημα μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τοῦ κέντρου κανονικᾶ

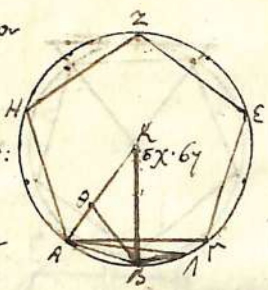
μετὰ τῶν ἄλλων, ἤγε πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφομένου ἑξαγώνου αἱ §3: I.

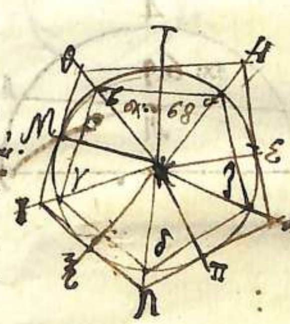
§288: Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ΑΒΓΖΗ (σχ: 67) δεκάγωνον κανονικόν, πεντάγωνον, καὶ πεντεδεκάγωνον ἐγγράψαι· τμηθείσης τῆς ΑΚ καὶ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Θ σημεῖον (264), ἡ ΑΒ ἴση τῷ μείζονι τμήματι ΚΘ ληφθεῖσα, ἡ ζητουμένη ἔσται τοῦ δεκαγώνου πλευρά. καθότι ἀχθείσης τῆς ΒΘ, ἔσεται ΑΚ: ΘΚ :: ΘΚ: ΑΘ, ἤγε ΑΚ: ΑΒ :: ΑΒ: ΑΘ, τοῦτ᾽ ἔστι τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΒΘ ὅμοιά εἰσιν. Ἀλλὰ τὸ ΑΚΒ ἰσοσκελές ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ΑΒΘ ἰσοσκελὲς ἔσεται, καὶ ΑΒ = ΒΘ = ΘΚ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΘΚ ἰσοσκελές. ὅθεν καὶ ἡ γωνία ΑΘΒ, ἤγε ἡ ΒΑΘ = ΑΒΚ, διπλασία ἔσται

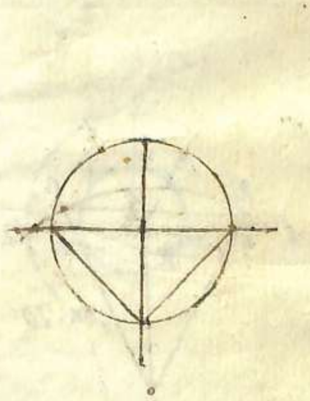
(139) τῆς ΑΚΒ· ὥστε ἡ ΑΚΒ ἴση ἔσεται τῷ πέμπτῳ δύο ὀρθῶν, ἤγε τῷ δεκάτῳ τεσσάρων ὀρθῶν, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τόξον ΑΒ τὸ δέκατον τῆς περιφερείας καὶ ἡ ΑΒ χορδὴ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἔσται, ἐὰν δὲ τὰς γωνίας ἐναλλὰξ ἐνώσωμεν, τὸ πεντάγωνον ΑΓΕΖΗ εὑρήσομεν. ὑποθέντες δὲ καὶ τὴν ΑΛ πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἕξομεν τὸ τόξον ΒΛ = $ΑΛ - ΑΒ = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, ἐξ οὗ δῆλον γίνεται, ὅτι ἡ χορδὴ ΒΛ κανονικοῦ πεντεδεκαγώνου ἐστὶ πλευρά.

§289: Ἐπειδὴ δέ, κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἐν κύκλῳ γραφέντος, τὰ ὑποτείνοντα τόξα εἰς δύο διαιροῦνται (184), καὶ τὰς χορδὰς τῶν τμημάτων ἄγοντες, πολύγωνον κανονικὸν εὑρίσκομεν διπλάσιον ἀριθμὸν ἔχον πλευρῶν, δῆλον ὅτι τετραγώνου μὲν ἐν κύκλῳ γραφέντος, καὶ τὰ κανονικὰ πολύγωνα γραφήσονται, ὅσα 8, 16, 32, 64, κτλ ἔχουσι πλευράς· ἑξαγώνου δὲ ἐγγραφέντος, καὶ τὰ 12, 24, 48 κτλ ἔχοντα πλευρὰς ἐγγραφόνται, ὁμοίως, μετὰ τὴν τοῦ δεκαγώνου ἐγγραφήν, καὶ τὰ 20, 40, 80 κτλ, ἔχοντα πλευράς, ἐγγράψομεν· μετὰ δὲ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ πεντεδεκαγώνου, καὶ τὰ 30, 60, 120 κτλ ἔχοντα πλευράς, ἐν κύκλῳ ἐγγραφήσονται. καὶ τοιαῦτα εἰσὶ πάντα τὰ ἐν κύκλῳ ἐγγραφόμενα κανονικὰ πολύγωνα.

§290: Δοθέντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ΑΒΓΔ κτλ (σχ: 68) πολύγωνον περιγράψαι τῷ δοθέντι ὅμοιον. Κατὰ τὰ μέσα Τ, Ν, Ξ κτλ τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ ἀχθεισῶν τῶν ἐφαπτομένων ΗΘ, ΘΙ, ΙΛ, κτλ, τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποπερατούμενον πολύγωνον, τὸ ζητούμενον ἔσεται. καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ ΗΘ, ΘΙ, ΙΛ κτλ παραλλήλως ἄγονται ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ, δῆλον, ὅτι αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι, κτλ ἴσαι ταῖς Α, Β, Γ, κτλ πᾶσαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΗΘΚ, ὅμοιά εἰσιν, ἕξομεν ΑΒ: ΗΘ :: ΒΚ: ΘΚ, ἀλλὰ ΒΚ: ΘΚ :: ΒΓ: ΘΙ, ὥστε ἔσεται καὶ ΑΒ: ΗΘ :: ΒΓ: ΘΙ, ἔστι δὲ ΑΒ = ΒΓ ὥστε καὶ ΗΘ = ΘΙ ἔσεται, ὁμοίως ἀποδειχθήσεται





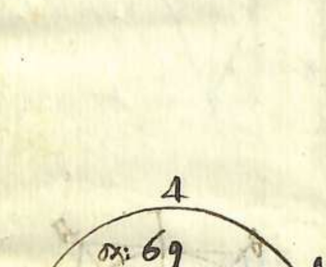


καὶ αἱ χορδαὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἴσαι. ὅθεν τὸ ΗΘΙΛ κτλ πολύγωνον ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον ὑπάρχον κανονικόν ἐστιν, ἔχει δὲ καὶ ἰσαρίθμους τὰς πλευρὰς τῷ ΑΒΓΔ κτλ, ὥστε ὅμοιον αὐτῷ ὑπάρχει (280).

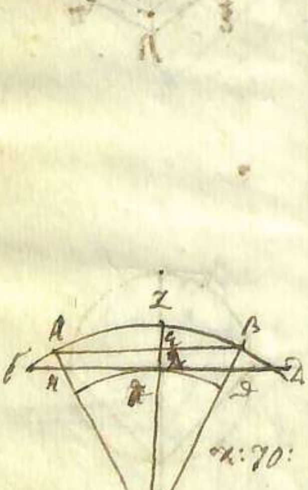
§ 291. Ἐὰν δὲ ζητηθῇ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τῷ δοθέντι περιγεγραμμένον ὅμοιον, ἀγαγόντες ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὰς γωνίας τὰς εὐθείας ΚΗ, ΚΘ, ΚΙ, κτλ, πρὸς δὲ καὶ τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἕξομεν τὸ ζητούμενον. Ἐὰν δὲ καὶ τὰ σημεῖα Τ, Ν, Ξ, κτλ τοῦ ἐσωτέρου ζητηθῶσι, τὸ αὐτὸ εὑρεθήσεται πολύγωνον. ὅθεν δῆλον γίνεται, ὅτι, ὅσα ἐν κύκλῳ ἐγγράφονται κανονικὰ πολύγωνα, τοσαῦτα καὶ περιγράψαι δυνατόν.

Λήμματα.

§ 292: Πᾶσα κυρτή, ἢ καὶ πολύγωνος κυρτὴ γραμμή, ὡς ἡ ΑΔΒ (σχ: 69) περὶ ἐλάττονα κυρτὴν ὡς τὴν ΑΜΒ ἀπὸ θατέρου μέρους εἰς τὸ ἔλαττον ὡσαύτως περιφερομένη μείζων αὐτῆς ἐστι. καθόλου γὰρ ὑποτεθῇ ἡ ΑΔΒ ἐλαχίστη μὲν πασῶν τῶν περιφερομένων, ἀλλ' οὖν δὲ ἡ ἴση τῇ ΑΜΒ, ἀχθείσης τῆς ΚΛ εὐθείας, ἐπειδὴ ἡ ΚΔΛ μείζων αὐτῆς ἐστι, δῆλον, ὅτι ἡ ΑΔΒ μείζων τῆς ΑΚΜΛΒ ἔσεται. ἀλλ' ἡ αὐτὴ ΑΔΒ ὑπετέθη καὶ ἐλαχίστη πασῶν τῶν περιφερομένων γραμμῶν, ἐσομένης δὲ ἐλάσσων καὶ τῆς ΑΚΜΛΒ, ὥστε ἡ αὐτὴ γραμμὴ καὶ μείζων καὶ ἐλάσσων τῆς αὐτῆς ἔσεται γραμμῆς, ὅπερ ἀδύνατον.

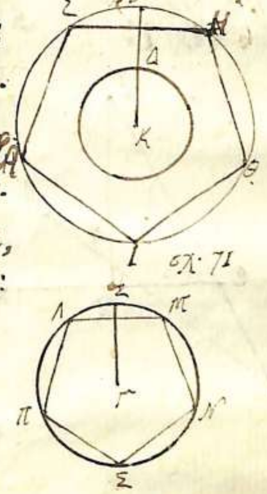


§ 293. Δύο δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν, δυνατὸν ἐστὶ τῇ μείζονι πολύγωνον ὅλως ἐγγράψαι, περὶ δὲ τὴν ἐλάσσονα πολύγωνον ὅλω περιγράψαι, ὥστε τὰς θατέρου πλευρὰς μηδόλως τῆς ἑτέρας περιφερείας συνάπτεσθαι. ὑποτεθέντος Κ τοῦ (σχ: 70) κέντρου τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΓΖΔ ἀχθείσης, ἐγγράφω ἐν τῇ μείζονι κανονικὰ πολύγωνα (289), ἕως ὅ εἰς τόξον καταντήσω τοῦ ΓΖΔ ἔλασσον, τὸ ΑΖΒ, ὅτινι ἡ χορδὴ ΑΕΒ μᾶλλον τῆς ΓΖΔ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀφέστηκε. ὅθεν καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, διὰ τοῦ τοιούτων δὲ χορδῶν ὑπάρχουσαι, μηδόλως τῇ ἐλάσσονι περιφερείᾳ συνάπτονται. ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΑΚ, ΒΚ δῆλον, ὅτι καὶ ἡ ΘΗ πλευρὰ ἔσεται περιγεγραμμένου πολυγώνου, ὅτινος αἱ πλευραὶ μηδόλως τῇ μείζονι συνάπτουσι περιφερείᾳ, καθότι ἡ ΘΗ ἐλάσσων τῆς ΑΒ οὖσα, μηδόλως τῇ μείζονι συνάπτει περιφερείᾳ.



Θεωρήματα.

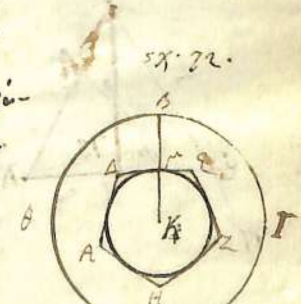
§294: Αἱ γοῦν τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν ἡμιδιάμετροι, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ ἐξ αὐτῶν τετράγωνα. Ἐστὶ γάρ, σημειωθήσεται τῆς περιφερείας ΑΒΘΙ (σχ: 71) διὰ τοῦ περιφ: ΒΚ, τῆς δὲ ΠΣΝ διὰ τοῦ περιφ: ΓΖ, εἰ γὰρ ὑποτεθέντος ΓΖ: ΒΚ :: περιφ: ΓΖ πρὸς ἑτέραν μείζονα, ἢ ἐλάσσονα τῆς περιφ. ΒΚ τὴν περιφ: ΔΚ, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐγγραφέτω τὸ πολύγωνον ΑΗ ἕως οὗ, ὥστε τὰς πλευρὰς αὐτοῦ μηδόλως τῇ περιφ: ΔΚ συναντᾶν (293), ἐγγραφέντος δὲ εἰς τῷ πολυγώνῳ ΜΠ ὁμοίου αὐτῷ, ἕξομεν περίμετρον ΜΠ: περιμ: ΑΗ :: ΓΖ: ΒΚ (284), ἀλλ᾽ αἱ ΓΖ: ΒΚ :: περιφ: ΓΖ: περιφ: ΔΚ ἐξ ὑποθέσεως, ὥστε ἔσεται εἰς περιμ: ΜΠ: περιμ: ΑΗ: περιφ: ΓΖ: περιφ: ΔΚ, ἤγουν περιμ: ΜΠ: περιφ: ΓΖ :: περιμ: ΑΗ: περιφ: ΔΚ. ἀλλὰ περιμ: ΜΠ $<$ περιφ: ΓΖ, ὥστε εἰς περιμ: ΑΗ $<$ περιφ: ΔΚ, ὅπερ ἀδύνατον (292), ὑποτεθέντος δὲ, ὅτι εἰς $ΓΖ^2 : ΒΚ^2$ :: ἐπιφ: ΓΖ πρὸς ἑτέραν μείζονα, ἢ ἐλάσσονα τῆς ἐπιφ: ΒΚ, τὴν ἐπιφ: ΔΚ, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐπειδὴ εἰς $ΓΖ^2 : ΒΚ^2$ :: ΜΠ: ΑΗ (284), ἔσεται εἰς ΜΠ: ΑΗ :: ἐπιφ: ΓΖ: ἐπιφ: ΔΚ, ἤγουν ΜΠ: ἐπιφ: ΓΖ :: ΑΗ: ἐπιφ: ΔΚ, ἀλλὰ ΜΠ $<$ ἐπιφ: ΓΖ, ὥστε εἰς ΑΗ $<$ ἐπιφ: ΔΚ, ὅπερ ἀδύνατον.


σχ: 71

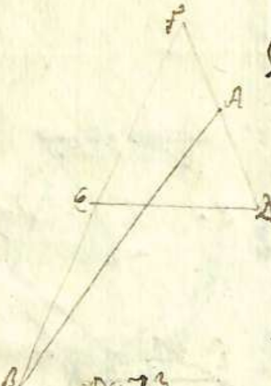
§295: Ἐκ τούτου ἔσεται, ὅτι εἰς τὰ ὅμοια τόξα, ὡσαύτως ὑποπολλαπλάσια ὄντα τῶν ἰδίων περιφερειῶν, ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι ἔσονται, οἱ δὲ ὅμοιοι τομεῖς, ὡς τὰ ἐξ αὐτῶν τετράγωνα.

§296: Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου ἰσότιμον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰς τὴν ἡμίσειαν ἡμιδιαμέτρον γινομένῳ, τουτ: ἕξομεν ἐπιφ: ΓΚ $= \frac{ΓΚ}{2}$ · περιφ: ΓΚ (σχ: 72). Ἐστὶ γάρ, ὑποτεθέντος τοῦ $\frac{ΓΚ}{2}$ · περιφ. ΓΚ ὡς ἰσοτίμου μείζονος, ἢ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΘΒΙ, φέρ᾽ εἰπεῖν, εἰς τῷ πολυγώνῳ ΑΕ ἕως οὗ περιγραφέντος, ὥστε τὰς πλευρὰς αὐτοῦ μηδόλως τῇ περιφερείᾳ ΒΘΙ συναντᾶν, ἐπειδὴ εἰς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τοιούτου πολυγώνου ἴση τῷ γινομένῳ ΓΚ (ΑΔ+ΔΕ+…) ἔσεται, μεῖζον τοῦ $\frac{ΓΚ}{2}$ (· περιφ: ΓΚ) ἐστὶ ἤγουν τοῦ ἰσοτίμου τῷ κύκλῳ ΒΘΙ, ἔσεται, ὅτι εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΕ μεῖζον τοῦ ΒΘΙ ἐστὶ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον.

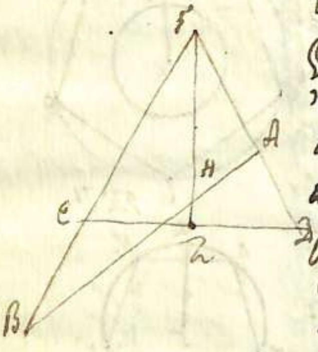
σχ: 72.

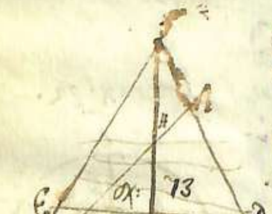


§297: Ἐκ τούτου ἔσεται ὅτι εἰς τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τομέως ἰσότιμον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τοῦ τόξου, εἰς τὴν ἡμίσειαν ἡμιδιαμέτρον γινομένῳ.



σχ. 73





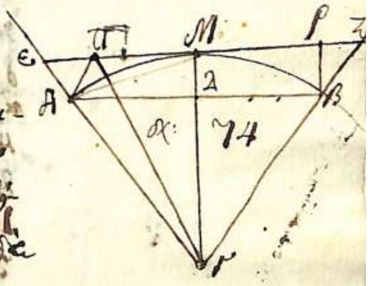
§298: Ἐπεὶ δὴ καὶ αἱ περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι, ἢ αἱ διάμετροι αὐτῶν (297), ὀνομάσαντες π τὴν περιφέρειαν, ἧς τινος διάμετρος ἐστὶν 1, ἕξομεν $1 : 2\rho :: \pi :$ περιφ. ρ, καὶ περιφ. $\rho = 2\pi\cdot\rho$, πολλαπλασιάσαντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ τὸ $\frac{\rho}{2}$, εὑρήσομεν $\frac{\rho}{2}\cdot$ περιφ. $\rho = \pi\cdot\rho^2$. Τουτ' ἔστι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου ἰσοδύναμον ἐστὶ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετραγώνῳ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιασθέντι, ἧς ἡ διάμετρος ἐστὶν ἡ 1, τουτ' ἔστιν ἐπὶ τὴν ἀναφορὰν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν.

§299: Ἐπεὶ δὴ δὲ καὶ κύκλον τετραγωνίσαι, τετράγωνον ἐστὶν εὑρεῖν ἴσον τῷ δοθέντι κύκλῳ, δῆλον ὅτι μέσην ἀνάλογον εὑρόντες τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἡμισείας ἡμιδιαμέτρου, ἕξομεν δι' αὐτῆς τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, ὥστε ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἀνάγεται, τουτ' ἔστιν εἰς τὴν ἀναφορὰν ἐκείνην, ἣν ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν· καθότι ταύτης γνωσθείσης ἴσως αὐτῆς, καὶ ἡ περιφέρεια εὑρίσκεται τῆς διαμέτρου διδομένης. Τῆς περιφερείας δὲ εὑρεθείσης, καὶ ἡ ἡμίσεια μέση ἀνάλογος γνωσθήσεται, ἑπομένως δὲ καὶ ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται. Ὅθεν καὶ πολλοὶ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν εὕρεσιν ἐνησχολήθησαν τῆς τοιαύτης ἀναφορᾶς, καὶ ὁ μὲν Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι μεταξὺ τοῦ $3+\frac{10}{70}$ καὶ $3+\frac{10}{71}$ εὑρίσκεται. Τουτ' ἔστιν ὅτι $3+\frac{1}{7}$ ὡς ἔγγιστα ἡ ζητουμένη ἐστὶν ἀναφορά. Ὁ δὲ Μέτιος εὗρεν αὐτὴν ὡς ἔγγιστα $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ εὗρον $\pi = 3,141592653$ ὡς διὰ τῶν ἑξῆς δῆλον γενήσεται. Πόρισμα.

§300: Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 73) ἰσοδύναμον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ ΓΔΕ, τῷ ἔχοντι τὴν Γ γωνίαν κοινήν, καὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ, ἢ ΓΕ μέσην ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΒΓ. Ἐὰν δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν Α ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὴν ΔΕ καθετος ἀχθεῖσα κάθετος, μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῆς ΑΓ, καὶ τῷ ἡμικεφαλαίῳ τῶν ΑΓ, ΒΓ. Ἐπεὶ δὴ καὶ ἡ γωνία Γ κοινή ἐστι, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔσεται πρὸς τὸ ΓΔΕ ὡς $ΑΓ\cdot ΒΓ : ΓΔ\cdot ΓΕ$ (243), τουτ' ἔστι πρὸς $ΓΔ^2$, ἢ πρὸς $ΓΕ^2$. Ὅθεν, ἐὰν ἡ ΓΔ, ἢ ΓΕ μέση ἀνάλογος τῶν ΑΓ, ΒΓ δοθῇ, τουτ' ἔστι $ΑΓ\cdot ΒΓ = ΓΔ^2 = ΓΕ^2$, ἔσεται καὶ $ΑΓΒ = ΓΔΕ$. Ἐπεὶ δὴ δὲ ἡ καθετος ἀχθεῖσα κάθετος τὴν γωνίαν Γ διχοτομῇ, ἔσεται $ΑΗ : ΒΗ :: ΑΓ : ΒΓ$, (231) καὶ $ΑΗ : ΑΗ+ΒΗ : ΑΒ :: ΑΓ : ΑΓ+ΒΓ$, ἀλλὰ $ΑΗ : ΑΒ :: ΑΓΗ : ΑΒΓ : 2ΓΔΖ$, ὥστε ἔσεται $ΑΓΗ : 2ΓΔΖ :: ΑΓ : ΑΓ+ΒΓ$, ἔχομεν δὲ καὶ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΑΓΗ, ΓΔΖ ὁμοιότητα $ΑΓ^2 : ΓΖ^2 :: ΑΓΗ : ΓΔΖ$, τουτ' ἔστι $ΑΓΗ : 2ΓΔΖ :: ΑΓ^2 : 2ΓΖ^2$, ὥστε ἕξομεν καὶ $ΑΓ : ΑΓ+ΒΓ :: ΑΓ^2 : 2ΓΖ^2$, τουτ' ἔστι $ΓΖ^2 : ΑΓ(ΑΓ+ΒΓ)$

:: $ΑΓ^2 : 2ΓΖ^2$ πολλαπλασιάσαντες δηλ. ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῷ πρώτῳ αὐτῷ ἐπὶ τὸ ΑΓ. ὅθεν εὑρίσκομεν $ΓΖ^2 = \frac{ΑΓ(ΑΓ+ΒΓ)}{2}$, καὶ ἑπομένως $ΑΓ:ΓΖ:: ΓΖ:\frac{ΑΓ+ΒΓ}{2}$.

Προβλήματα.



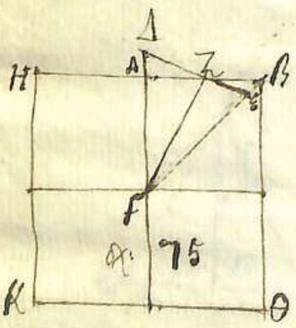
§301. Τῶν ἐμβαδῶν δοθέντων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὰ ἐμβαδὰ εὑρεῖν, ἑτέρου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δηλ. καὶ περιγεγραμμένου, διπλάσιον δὲ ἀριθμὸν ἔχοντος πλευρῶν. Ὑποτεθείσης ΑΒ (σχ: 74) τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου α, ἔτι δὲ τῆς τοῦ δοθέντος περιγεγραμμένου β, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ΑΜ πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου ἐγγεγραμμένου φ, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ἐφαπτομένων Απ, Βρ, ὥστε τῆς πλευρᾶς πρ τοῦ ζητουμένου περιγεγραμμένου χ προσδιορισθείσης, ἔχομεν ΑΓΛ : ΑΓΜ :: ΓΛ : ΓΜ, ἀλλὰ ΑΓΛ : ΑΓΜ :: α : φ, ὥστε ἔσεται α : φ :: ΓΛ : ΓΜ : ΓΑ, ἔτι δὲ καὶ ΑΓΜ : ΓΕΜ :: ΑΓ : ΓΕ, καὶ ἑπομένως φ : β :: ΑΓ : ΓΕ, πρὸς δὲ τούτοις καὶ ΓΛ : ΓΜ :: ΑΓ : ΓΕ, ὥστε ἔσεται καὶ α : φ :: φ : β, καὶ $φ=\sqrt{αβ}$, τὸ ζητούμενον δηλ. ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου μέσον ἀνάλογον τῶν δοθέντων ἐμβαδῶν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΓΜπ : ΓΕπ :: Μπ : Επ, καὶ Μπ : Επ :: ΓΜ : ΕΓ (231), καὶ ΓΜ : ΕΓ :: ΓΛ : ΑΓ :: α : φ ἔσεται καὶ ΓΜπ : ΓΕπ :: α : φ, καὶ ἑπομένως ΓΜπ : ΓΕΜ :: α : α+φ ὥστε 2ΓΜπ : ΓΕΜ :: 2α : α+φ. ἀλλὰ 2ΓΜπ, ὥστε ΑΓΜπ : ΓΕΜ :: χ : β, ὥστε ἔχομεν καὶ χ : β :: 2α : α+φ καὶ ἑπομένως $χ = \frac{2αβ}{α+φ} = \frac{2αβ}{α+\sqrt{αβ}}$.

§302. Τὸν ὡς ἔγγιστα τῆς διαμέτρου ~~καὶ τῆς περιφερείας~~ καὶ τῆς περιφερείας λόγον ἀνευρεῖν. Ὑποτεθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου ἴσης τῇ 1, ἔσεται τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἡ πλευρὰ ἴση τῇ $\sqrt{2}$ (284), τοῦ δὲ περιγεγραμμένου ἴση τῷ 2, ἑπομένως δὲ ἡ μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνεια ἔσεται 2, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου 4, ὥστε ἐὰν ἀντὶ τοῦ α τὸ 2, ἀντὶ δὲ τοῦ β τὸ 4 θέσωμεν … ἀντιμεταλλαχθῇ σχήματι (301), ἔχομεν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον $φ=\sqrt{αβ}=\sqrt{2·4}=2,8284271$, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ὥστε τὸ $χ=\frac{2αβ}{α+φ}=\frac{16}{2+\sqrt{2·4}}=3,3137085$, τὰ ὀκτάγωνα δὲ εὑρόντες, καὶ τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς τὰ αὐτὰ γωνικὰ σχήματα ἀντιμεταζητήσαντες, ὥστε τὸ μὲν $α=2,8284271$ ὑποθέντες, τὸ δὲ $β=3,3137085$, … τὰ ἔπειτα δεκαέξ ἔχοντα πλευρὰς ἀντικαταστήσομεν. διὰ τούτων δὲ εὑρίσκομεν … τὰ ἔχοντα 32 καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Τῶν δὲ πολυγώνων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εὑρήσομεν πολλὰ τὴν ζητουμένην διαφορὰν ἀλλήλων διαφέροντα. Ἐὰν ζητήσωσιν, ὡς τὸ πολύγωνα μηδὲ καὶ δεκάκις χιλιοστῷ ἀλλήλων διαφέροντα, ἕξομεν δι' ἀλλεπαλλήλων ἀντικαταστάσεων

ἀριθμ: πλευρῶν.	Πολύγωνα ἐγγεγραμ:	Πολύγ: περιγεγραμ:
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415938
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415926	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926.

Ὅθεν μανθάνομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, οὗτινος ἡ ἡμιδιάμετρος ἐστὶν ἡ μονάς, ὡς ἔγγιστα τῷ 3,1415926 ἴση ἔσται. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἐπὶ τὴν ἡμιδιάμετρον πολλαπλασιασθείσῃ (296), δῆλον, ὅτι τῆς ἡμιδιαμέτρου ἴσης τῇ 1 ὑποτεθείσης, ἤτοι τῆς διαμέτρου ἴσης τῷ 2, ἡ ἡμιπεριφέρεια ἔσεται 3,1415926, ἡ δὲ περιφέρεια 2·3,1415926, ὥστε τῆς διαμέτρου ἴσης τῇ 1 ὑποτεθείσης, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ταῖς ἡμιδιαμέτροις, ἢ διαμέτροις ἀνάλογον, ἡ περιφέρεια ἔσται 3,1415926, τουτ: ἕξομεν $\pi = 3,1415926$ (298).

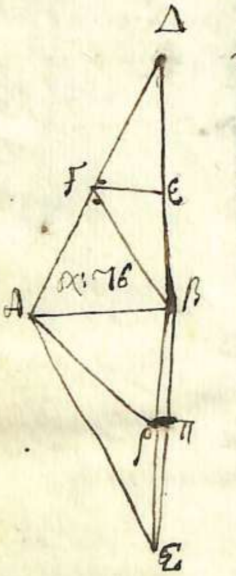


§ 303: Κύκλον εὑρεῖν τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ τετραγώνου ΗΘ φέρ' εἰπεῖν (ΘΚ:75) καθ' ὡρισμένην διαφέροντα. Ἀχθείσης τῆς καθέτου AF ἀπὸ τοῦ κέντρου F τῇ πλευρᾷ ΒΗ, δῆλον, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ F, διαστήματι δὲ τῷ AF, γραφόμενος κύκλος, ἐγγεγραμμένος τῷ τετραγώνῳ ἐλάσσων αὐτοῦ ἐστι, ὁ δὲ κέντρῳ μὲν τῷ F, διαστήματι δὲ τῷ BF γραφόμενος περὶ τὸ τετράγωνον περιγεγραμμένος καὶ μείζων αὐτοῦ ἔσεται. Ληφθείσης δὲ τῆς FΔ, ἢ τῆς FE μέσης ἀνάλογον ταῖς AF, BF, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον FEΔ ἰσοδύναμον τῷ ABF, ἀφαιρεθέντος (300) ὅλω δὲ ἂς ἴδω(μεν) λοιπὸν τοῦ τετραγώνου τριγώνου εἰς ἰσοσκελῆ μεταβληθέντων, ὀκταγώνου εὑρήσομεν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ ἰσοδύναμον. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ μὲν ἐν τῷ ὀκταγώνῳ γραφομένου κύκλου ἔσεται ἡ ΓZ μέση ἀνάλογος δηλ: τῶν $A\Gamma$, $\frac{A\Gamma+B\Gamma}{2}$, τοῦ δὲ περιγραφομένου ἡ $\Gamma\Delta$, ἤ ἡ ΓE μέση ἀνάλογος δηλ: τῶν $A\Gamma$, $B\Gamma$, ἂς ὅτι, ὅθεν τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν γραφομένων κύκλων, μᾶλλον εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον προσεγγίζουσιν, ἐὰν δὲ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Gamma\Delta Z$ εἰς ἰσοσκελὲς μεταβάλωμεν. πρὸς δὲ ἂς τὰ πρῶτα τοῦ ὀκταγώνου τρίγωνα εἰς πολύγωνον ἑκκαιδεκάγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ, δεκαέξ δὲ ἔχον πλευράς, καταλαμβάνομεν. ὡς τοῦ μὲν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἀνάλογος ἔσεται ταῖς ΓZ, $\frac{\Gamma Z+\Gamma\Delta}{2}$, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου ταῖς ΓZ, $\Gamma\Delta$. ὅλοι δὲ οἱ κύκλοι ὅτι μᾶλλον εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον προσεγγίζουσιν. ὅλω δὲ ποιοῦντες, τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ ζητουμένου εὑρήσομεν κύκλου, ὑποτεθέντος φέρ᾽ εἰπεῖν, α τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ ἐν τῷ τετραγώνῳ ἐγγραφομένου κύκλου, β, τοῦ περὶ αὐτὸ περιγραφομένου, α′ τοῦ ἐν τῷ ὀκταγώνῳ, β′ τοῦ περὶ αὐτό, α″ τοῦ ἐν τῷ 16 ἔχοντι πλευράς, β″ τοῦ περὶ αὐτό ἂς ὅλοι ἐφεξῆς, ἔσεται $\alpha' = \sqrt{\alpha\frac{(\alpha+\beta)}{2}}$ $\beta' = \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha'' = \sqrt{\alpha'\frac{(\alpha'+\beta')}{2}}$, $\beta'' = \sqrt{\alpha'\beta'}$ ἂς ὅλο καθεξῆς. δοθείσης φέρ᾽ εἰπεῖν τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγ: ἴσης τῷ 2, ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγραφομένου κύκλου ἴση τῇ 1 ἔσεται, ἡ δὲ τοῦ περιγραφομένου ἴση τῷ $\sqrt{2} = 1,4142136$, ὅθεν ὑποθέντες $\alpha = 1$, $\beta = 1,4142136$, εὑρήσομεν $\alpha' = 1,0986841$, $\beta' = 1,1892071$, ταῦτα δὲ πάλιν τὰ ἰσότιμα εἰς τὰ ἀνωτέρω ἀντικαταστήσαντες σχήματα, ἕξομεν $\alpha'' = 1,1210863$, $\beta'' = 1,1430500$, τοιαύτας δὲ ἀντικαταστάσεις ἐκτελοῦντες, εὑρήσομεν καὶ ἀρέσκοντας ἀλλήλων διαφερούσας τὰς ἡμιδιαμέτρους τῶν ἐγγραφομένων καὶ περιγραφομένων κύκλων εἰς τὰ τοῦ δοθέντι τετραγώνῳ ἰσοδύναμα πολύγωνα, ἕξομεν δηλ:

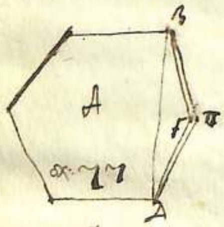
Ἡμιδιάμετρος κύκλων ἐγγεγρ.	Ἡμιδιαμ. κύκλων περιγρ.
1,0000000	1,4142136
1,0986841	1,1892071
1,1210863	1,1430500
1,1265639	1,1320149
1,1279257	1,1292862
1,1282657	1,1286063
1,1283508	1,1284360
1,1283721	1,1283934
1,1283774	1,1283827
1,1283787	1,1283801
1,1283791	1,1283794
1,1283792	1,1283792

ὅθεν μανθάνομεν, ὅτι 1,1283792 ἐστὶν ὡς ἔγγιστα ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ τῷ μοναδικῷ τετραγώνῳ ἰσοδυναμοῦντος κύκλου, ὥστε ὑποθέντος τοῦ τοιούτου ἴσου τῷ H, ἀλλ' ἐπειδὴ παντὸς κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ $\pi \cdot H^2$ (298), ἔσται $\pi \cdot H^2 = 4$, καὶ $\pi = \frac{4}{H^2} = \frac{4}{(1{,}1283792)^2} = 3{,}1415926$ ὡς καὶ ἀνωτέρω (302)

Θεωρήματα

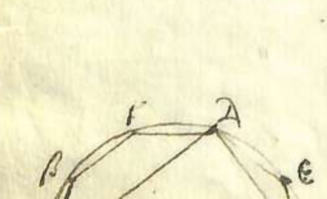


§304: Πάντων τῶν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ἴσας τὰς περιμέτρους ἐχόντων τριγώνων μέγιστον ἐστὶ τὸ ἰσοσκελές. Δηλονότι, φέρ' εἰπεῖν, ὑποθέσεως τῆς $AΓ = BΓ$ (σχ: 76), καὶ $Aρ + Bρ = AΓ + BΓ$, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ABΓ > ABρ$ ἔσεται. Καθότι, κέντρῳ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ $AΓ = BΓ = ΓΔ$ κύκλου γραφέντος, καὶ τῆς καθέτου ΒΔ ἕως ἐκβληθείσης, ὥστε τὴν $ρσ = Bρ$ γενέσθαι· ἀχθήτω δὲ καὶ ἡ ΑΣ, καὶ τῶν καθέτων Πρ, ΓΕ, ἔσονται $Aρ + Bρ = Aρ + ρσ$, ἀλλὰ $Aρ + Bρ = AΓ + BΓ = AΔ$, ὥστε $Aρ + ρσ = AΔ$ ἔσεται, ἐπεὶ δὲ $Aρ + ρΣ > AΣ$, ὥστε καὶ $AΔ > AΣ$, ἔστω. Ὅθεν δῆλον ὅτι ἡ ΑΔ ἀπέχει μᾶλλον ἢ ΑΣ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀπεχῆ καθέτου (119), καὶ ἑπομένως, ὅτι $BΔ > BΣ$ ἐστί, καὶ $BE > BΠ$, ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒρ τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη ΒΕ, ΒΠ ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον $ABΓ > ABρ$ ἔσεται.



§305: Ἐὰν τὸ πολύγωνον Α (σχ: 77) μέγιστον πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων καὶ ἰσαρίθμους αὐτῷ τὰς πλευρὰς ἐχόντων πολυγώνων ὑποτεθῇ, καὶ ἰσόπλευρον ἔσεται. Καθότι, ὑποτεθήσεται $ΓΔ > BΓ$, φέρ' εἰπεῖν, καὶ κατασκευασθέντος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΔΠ ἰσοπεριμέτρου τῷ ΒΓΔ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖζον ἔσεται τοῦ ΒΓΔ, καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΠΔ μεῖζον τοῦ ἰσοπεριμέτρου αὐτῷ ΑΒΓΔ, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

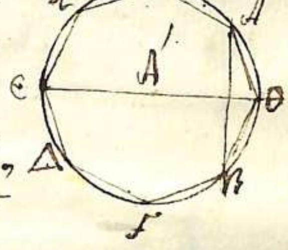
§306: Πάντων τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ (σχ: 78) τῶν δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἐχόντων, ἄνισον δὲ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν μέγιστον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ, ἐν ᾧ δηλ: αἱ ἴσαι αὐτῶν πλευραὶ ὀρθὴν σχηματίζουσι γωνίαν. Καθότι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν ΑΒ, πρὸς ἄλληλα ἔσονται ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, ἐπεὶ δὲ τὸ ὕψος $AΓ > ΔE$, ὥστε καὶ $ABΓ > ABΔ$ ἔσεται.



§307: Ἐὰν ὑποτεθῇ ΑΒΔΖ μέγιστον πάντων (σχ: 79) τῶν διὰ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τινος καθ' αἵρεσιν παραβαλλομένης ΑΖ φέρ' εἰπεῖν, σχηματιζομένων πολυγώνων, πᾶσαι μὲν αἱ αὐτοῦ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ τῷ κύκλῳ ἐγγράφονται· ἡ δὲ καθ' αἵρεσιν παραβαλλομένη πλευρὰ, διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου, καθότι ἀχθεισῶν τῶν διαγωνίων ΑΔ, ΔΖ, ἡ γωνία ΑΔΖ ὀρθὴ ἔσεται καὶ ἡ ΑΖ διάμετρος. Καὶ ἑπομένως ἡ Δ γωνία τοῦ πολυγώνου ἐν κύκλῳ ἐγγραφήσεται, εἰ δὲ μὴ ἡ ΑΔΖ ὀρθὴ εἶναι λειφθήσεται, τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΔΖ μεῖζον γενήσεται, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

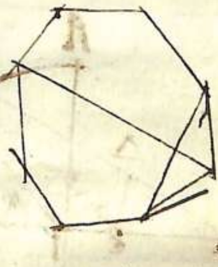
ὥστε πάντων τοῦ πολυγώνου τῶν διὰ δοθεισῶν πλευρῶν, καὶ ἴσως καὶ ἀράρησαν λαμβανομένων σχηματισθέντων μέγιστον ἐστὶ τὸ πάσας τὰς γωνίας ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένας ἔχον, καὶ ἀρέσκεται δὲ πλευρὰν τὴν διάμετρον.

§308: Πάντων τῶν διὰ τῶν αὐτῶν δοθεισῶν πλευρῶν σχηματισθέντων πολυγώνων μέγιστον ἐστὶ τὸ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένον. Οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, δοθεισῶν τῶν πλευρῶν $AB=\alpha\beta$, $B\Gamma=\beta\gamma$, $\Gamma\Delta=\gamma\delta$, τὸ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον $A'AB$ μεῖζον τοῦ μὴ ἐγγεγραμμένου $B'\alpha\beta$ ἔσεται. Καθότι, ἀχθείσης τῆς διαμέτρου (σχ:80) $E\Theta$, καὶ τῶν $A\Theta$, $B\Theta$, κατασκευασθέντος δὲ καὶ τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\vartheta = AB\Theta$, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς $\epsilon\vartheta$, τὸ πολύγωνον $EH\Theta$ μεῖζον ἔσεται τοῦ $\epsilon\eta\vartheta$, καὶ τὸ $E\Gamma\Theta$ τοῦ $\epsilon\gamma\vartheta$ (307). ὅθεν καὶ ὅλον τὸ $A'A\Theta B$ μεῖζον ἔσεται τοῦ $B'\alpha\vartheta\beta$, καὶ ἑπομένως τὸ $A'AB$ μεῖζον ἀποδειχθήσεται τοῦ $B'\alpha\beta$.



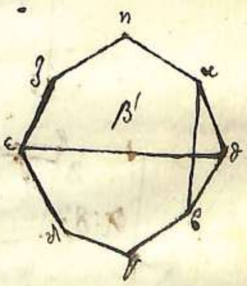
σχ: 80:

§309 Πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων καὶ ἰσαρίθμους τὰς πλευρὰς ἐχόντων πολυγώνων μέγιστον ἐστὶ τὸ κανονικόν. Καθότι, ἐπειδὴ καὶ τὸ μέγιστον ἰσόπλευρον ἐστι (305), καὶ ἐν κύκλῳ ἐγγράφεται (308), ἔσεται ὅτι τὸ κανονικὸν καὶ ἴσας τὰς πλευρὰς ἔχον, καὶ ἐγκύκλῳ ἐγγραφόμενον, μέγιστον ἔσεται.

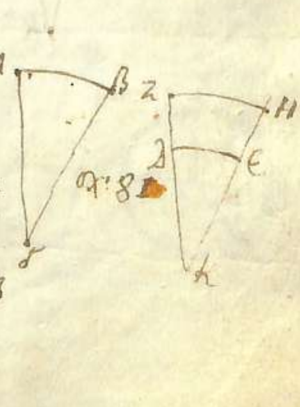


σχ:80

§310: Ὑποτεθήσονται περίμετροι γωνίαι Γ, K (σχ: 81) ὑποτεθήσονται κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ αὐτῶν τόξα AB, ΔE διὰ τῶν [illegible] αὐτῶν $A\Gamma$, ΔK διαιρεθέντα. Καθότι γραφέντος τοῦ τόξου ZH διὰ τῆς $ZK = A\Gamma$, ἔχομεν $\Gamma : K :: AB : ZH$, ἤτοι $\Gamma : K :: \frac{AB}{A\Gamma} : \frac{ZH}{ZK}$, ἔχομεν δὲ καὶ $ZH : \Delta E :: ZK : \Delta K$ (295), καὶ ἑπομένως $\frac{ZH}{ZK} = \frac{\Delta E}{\Delta K}$, ὥστε ἀρήσομεν καὶ $\Gamma : K :: \frac{AB}{A\Gamma} : \frac{\Delta E}{\Delta K}$.



§311: Δύο κανονικοὶ καὶ ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ πλείονας ἔχον πλευρὰς μεῖζον ἐστιν. Ὑποτεθήσης ΔE (σχ: 82) ἡμιπλευρᾶς, K τὸ κέντρον, EK τὸ ἀπόθεμα θατέρου τῶν τοιούτων πολυγώνων τοῦ ἔχοντος, φέρ' εἰπεῖν πλείονας πλευράς, AB δὲ ἡμιπλευρᾶς, Γ τὸ κέντρον, καὶ ΓB τὸ ἀπόθεμα τοῦ ἑτέρου, τεθέντων δὲ τῶν ἀποθεμάτων κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν KH, φέρ' εἰπεῖν, καὶ τοῦ κέντρου καθότι ἀπέχουσιν τὴν $H\Gamma$ ἀπεχόντων, ἐπειδὴ ὅτι τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν $KH\Gamma$, ἀνίσων οὐσῶν, αἱ πλευραὶ $K\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ ἐπεκτεινόμεναι, κατά τι σημεῖον τὸ Z συναντῶνται. Ἐκ τούτου λοιπὸν τοῦ σημείου τῆς καθέτου ZH καταχθείσης, καὶ κέντροις τοῖς K, Γ, διαστήμασι δὲ τοῖς KH, ΓH, τῶν τόξων HI, $H\Theta$ γραφέντων, ἔχομεν $K : \Gamma :: \frac{HI}{HK} : \frac{H\Theta}{\Gamma H}$ (310), ἀλλὰ ΔE, καὶ AB ἔχουσι πρὸς τὰς ὅλας περιμέτρους ὡς αἱ γωνίαι K, Γ πρὸς 4 ὀρθάς, ἐπεὶ δ' αἱ περίμετροι αὗται ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε ἔχομεν $\Delta E : AB :: K : \Gamma$. καὶ ἑπομένως $\Delta E : AB :: \frac{HI}{HK} : \frac{H\Theta}{\Gamma H}$, ἤτοι $\Delta E \cdot HK : AB \cdot \Gamma H :: HI : H\Theta$. πολλαπλασιάσαντες δηλ: τὰς μὲν ἡγουμένας ἐπὶ τὴν HK, τὰς δὲ ἑπομένας ἐπὶ τὴν ΓH, ἐπειδὴ δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων $K\Delta E$, KZH ἔχομεν $KE : KH :: \Delta E : ZH$ ἤτοι $KE \cdot ZH = KH \cdot \Delta E$, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν $AB\Gamma$, ΓZH λαμβάνομεν $\Gamma B : \Gamma H :: AB : ZH$, ἤτοι $\Gamma B \cdot ZH = \Gamma H \cdot AB$, ἐπειδὴ ὅτι ἔχομεν καὶ $KE \cdot ZH : \Gamma B \cdot ZH :: \Delta E \cdot HK : AB \cdot \Gamma H :: HI : H\Theta$, ἤτοι $KE : \Gamma B :: HI : H\Theta$, ἔστι δὲ $HI > H\Theta$ (ἐκβληθείσης τῆς τόξου $H\Theta$ κατὰ τὸ $\Theta\Lambda = H\Theta$ ἐπιλαμβάνοντος, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Π, διαστήματι δὲ τῷ $\Lambda\Pi = KH$, τοῦ τόξου [illegible] $H\Sigma$ γραφέντος, ἔσεται ἡ κοιλότης $H\Sigma\Lambda > H\Theta\Lambda$, καὶ $H\Sigma > H\Theta$, ὅθεν πολλῷ μᾶλλον $HI > H\Theta$ ἔσεται), ὥστε ἔχομεν καὶ $KE > \Gamma B$

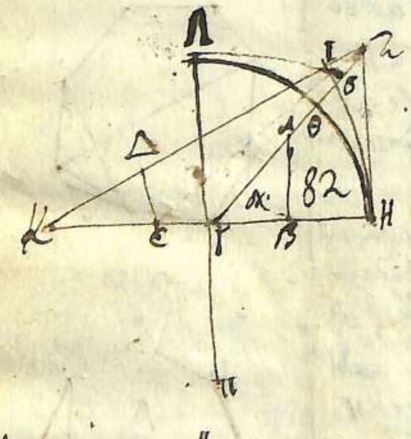


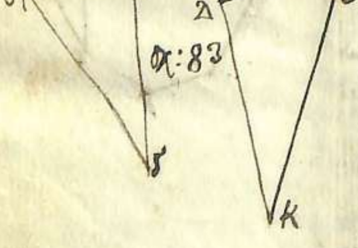
σχ: 81

τ. ἔ. τὸ ἐμβαδὸν τῶν πλείονας ἐχόντων πλευρὰς κανονικῶν πολυγώνων μεῖζόν ἐστιν· ὅθεν τὰ ἰσοπερίμετρα κανονικὰ πολύγωνα πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ αὐτῶν ἀποθέματα (284) ὥστε δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ πλέονας ἔχον πλευρὰς μεῖζόν ἐστι.

§312 Παντὸς ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου ὁ κύκλος μείζων ἐστίν. ὑποθέσθω ΑΙ (σχ: 83) ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἰσοπεριμέτρου τῷ κύκλῳ πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον αὐτοῦ καὶ ἡ γωνία ΑΓΙ = ΔΚΕ, ἔσται καὶ ΑΙ = ΔΕ, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ πολύγωνον ἔχει πρὸς τὸν κύκλον ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΙ πρὸς τὸν τομέα ΔΚΕ, ὀνομάσαντες π τὸ πολύγωνον, κ τὸν κύκλον, ἕξομεν $\pi : \kappa :: \text{ΑΙ}\cdot\frac{\text{ΓΙ}}{2} : \frac{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΚΕ}}{2} ::$ ΓΙ : ΚΕ, ἀχθείσης δὲ τῆς ἐφαπτομένης ΗΕ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΓΙ, ΗΚΕ, εὑρήσομεν ΓΙ : ΚΕ :: ΑΙ, ἤτοι ΔΕ : ΗΕ, ὥστε ἕξομεν καὶ π : κ :: ΔΕ : ΗΕ, ἢ $\pi : \kappa :: \frac{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΚΕ}}{2} : \frac{\text{ΗΕ}\cdot\text{ΚΕ}}{2}$ τ. ἔ. τὸ πολύγωνον ἔχει πρὸς τὸν ἰσοπερίμετρον αὐτῷ κύκλον, ὡς ὁ τομεὺς ΔΚΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΚΕ.

τ. ἔ. ἔλασσον τοῦ κύκλου ἔσται.





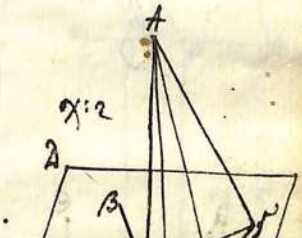
Βιβλίον $\varepsilon^{ον}$ περὶ στερεῶν. $\alpha^{ον}$ δὲ περὶ ἐπιπέδων καὶ περὶ στερεῶν γωνιῶν. Θεωρήματα

§313: Ἀδύνατον εὐθείας μέρος μὲν ἐπὶ ἐπιπέδου κεῖσθαι, μέρος δὲ μή. καθότι τοῦτο δυνατοῦ ὑποτεθέντος, δύο εὐθεῖαι δύο κοινὰ ἕξουσι σημεῖα, ἀλλήλων ἀποχωροῦσαι, ὅπερ ἀδύνατον, (102)

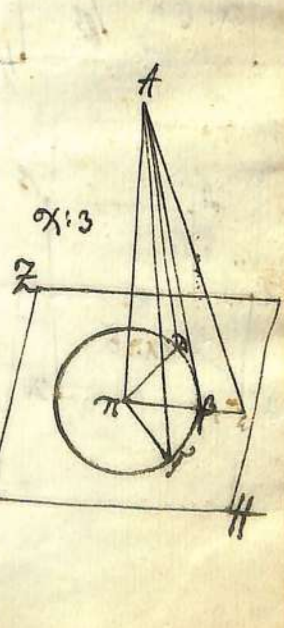
§314: Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, (σχ: 1) ἀλλήλας τέμνουσαι, ἢ παράλληλοι οὖσαι ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου. καθότι, τὸ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον περὶ αὐτὴν περιστρεφόμενον, ἕως οὗ κατὰ τὸ Γ φθάσῃ σημεῖον, δύο ἕξει κοινὰ σημεῖα τῇ ΑΓ. τουτ: ἡ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΒ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείσονται ἐπιπέδου· ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ καὶ ἡ ΓΔ ἀλλήλας τέμνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου, ὥστε καὶ ἡ ΓΔ καὶ ΑΒ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείσονται ἐπιπέδου. ἔτι καὶ ἡ θέσις τούτου διὰ τῶν αὐτῶν προσδιορίζεται εὐθειῶν, ἤγουν διὰ τοῦ τριγ: ΑΒΓ. τουτ: διὰ 3 σημείων Α, Β, Γ. ἢ καὶ διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

§315: Ἡ κοινὴ δύο ἐπιπέδων τομὴ εὐθεῖα ἐστιν, ἐπειδή, ἐὰν τρία μόνα σημεῖα ταύτης μὴ ἐπ᾽ εὐθείας ὑποτεθῶσιν, τὰ ἐπίπεδα δι᾽ αὐτῶν διερχόμενα, ἐπ᾽ αὐτῶν ἅψονται διέλθωσιν, ἤγουν ταυτίζονται, ὅλοις συμπίπτου, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἐναντίον.

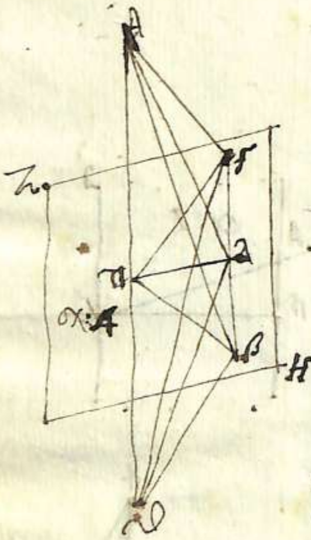
§316: Ἡ εὐθεῖα ΑΠ κάθετος οὖσα δυσὶν εὐθείαις ΒΠ, ΓΠ (σχ: 2) ἀλλήλας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τεμνούσαις, κάθετος ἔσται καὶ τῇ ΠΚ, καὶ πάσαις λοιπαῖς, ταῖς διὰ τοῦ πέρατος Π ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διερχομέναις. καὶ ἐπομένως τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕ. διὰ τοῦ σημείου Κ καθ᾽ ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς ΚΠ ληφθέντος, τῆς ΒΓ οὕτω πως ἀχθείσης, ὥστε ἴσας ΒΚ = ΓΚ (265), ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ, ἕξομεν διὰ τὸ τρίγωνον ΒΓΠ, $\overline{\Gamma\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 = 2\overline{K\Pi}^2 + 2\overline{\Gamma K}^2$ (225), διὰ δὲ τὸ ΑΒΓ, $\overline{A\Gamma}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AK}^2 + 2\overline{\Gamma K}^2$. ἀπὸ ταύτης δὲ τὴν πρώτην κατὰ τάξιν ἀφελόντες, καὶ ἀντὶ τῶν $\overline{A\Gamma}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$, $\overline{AB}^2 - \overline{B\Pi}^2$, τὸ ἰσόδυναμον $\overline{A\Pi}^2$ ἀντικαταστήσαντες, ἕξομεν $2\overline{A\Pi}^2 = 2\overline{AK}^2 - 2\overline{K\Pi}^2$, καὶ ἐπομένως $\overline{AK}^2 = \overline{A\Pi}^2 + \overline{K\Pi}^2$. τουτ: τὸ τριγ: ΑΠΚ ὀρθογώνιον ἐστίν. ἡ ΑΠ δηλ: κάθετος τῇ ΚΠ (217).



§317: Ἡ ΑΠ κάθετος ἐλαχίστη πασῶν τῶν ἀγομένων οὖσα, τὴν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, τοῦ σημείου Α δηλώσει ἀπόστασιν, δῆλον δὲ πρὸς τούτοις ὅτι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μίαν μόνην κάθετον καταγαγεῖν δυνατόν, ὡς καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μίαν μόνην ἀναγαγεῖν.



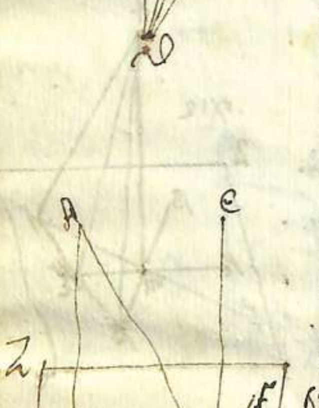
§318: Αἱ ἀπὸ τῆς καθέτου ΑΠ (σχ: 3) ἐξ ἴσου ἀπέχουσαι πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἡ δὲ μᾶλλον ἀπέχουσα μείζων ἀπεχούσης· καθότι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ΑΒΠ, ΑΓΠ, ΑΔΠ ... κοινὴ ἡ ΑΠ καὶ νῦν ἐστιν αἱ δὲ ΒΠ, ΓΠ, ΔΠ ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἡ ΑΕ μείζων τῆς ΑΒ ἔσται, μείζων ἐστὶ γὰρ τοῦ πλαγίου τῶν ἴσων ἀπεχουσῶν.



§319: Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι δοθέντος σημείου τινὸς Α, ἐκτὸς ἐπιπέδου τινὸς ΖΗ (σχ:3), καὶ ζητηθέντος τοῦ σημείου Π, δι' οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κατηγμένη κάθετος διελεύσεται, εὑρόντες ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ Α ἀπέχοντα, καὶ δι' αὐτῶν περιφέρειαν γράψαντες, ἕξομεν διὰ τὸ κέντρον αὐτῆς τὸ ζητούμενον σημεῖον. Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ γωνία ΑΒΠ, ἥτις καὶ κλίσις τῆς πλαγίας ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΗ ὀνομάζεται, ἡ αὐτὴ ἐστὶ κατὰ πάσας τὰς ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπεχούσας πλαγίας.

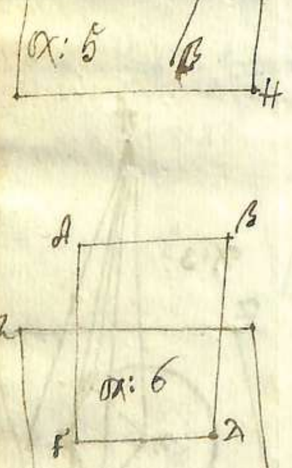
§320: Τῆς ΑΠ (σχ:4), καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ ὑποτεθείσης, καὶ τῆς ΠΔ καθέτου τῇ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΒΓ ἀχθείσης, καὶ ἡ ζευγνύουσα τὰ σημεῖα Α, Δ εὐθεῖα, ἡ ΑΔ κάθετος ἔσται τῇ ΒΓ· καθότι τῆς ΒΔ = ΓΔ ληφθείσης, καὶ τῶν ΒΠ, ΓΠ ἀχθεισῶν, πρὸς δὲ καὶ τῶν ΑΓ, ΑΒ, ἕξομεν ΠΒ = ΓΠ, καὶ ἐπομένως ΑΒ = ΑΓ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΒ = ΑΔΓ

§321: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΓ κάθετος οὖσα τῇ ΑΔ, καὶ ΔΠ, κάθετος ἔσται καὶ τῷ δι' αὐτῶν διερχομένῳ ἐπιπέδῳ (316). Δῆλον δὲ πρὸς τούτοις, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΘ, ΒΓ ὡς μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, οὐδέποτε ἀλλήλαις συναντήσουσι, καὶ ὅτι ἡ ἀμφοτέραις κάθετος ΠΔ ἐλαχίστη αὐτῶν ἐστὶν ἀπόστασις. Εὑρίσκεται δὲ ἡ τοιαύτη τῶν εὐθειῶν ἀπόστασις, ἐὰν ἐπὶ μὲν τῆς ΒΓ ληφθῶσι σημεῖα ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ Α ἀπέχοντα, τὰ Β, Γ φέρ' εἰπεῖν, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΘ ὁμοίως δύο σημεῖα ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ Β ἀφιστάμενα τὰ Α, Θ δηλ: ζητηθῶσι δὲ τὰ μέσα τούτων σημεῖα Δ, Π· καθότι τότε ἡ ΔΠ κάθετος ἔσται ἀμφοτέραις ταῖς εὐθείαις ΑΘ, ΒΓ.



§322: Ἡ τῇ καθέτῳ ΑΠ (σχ:5) παράλληλος ΔΕ κάθετος ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ· καθότι ἀχθέντος διὰ τῶν ΑΠ, ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου ΑΠΔΕ, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ΑΔ εὐθείας, ἡ ΒΓ κάθετος ἀχθεῖσα τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΔΠ κάθετος ἔσται καὶ τῇ ΑΔ (320), καὶ ἐπομένως τῷ δι' αὐτῶν διερχομένῳ ἐπιπέδῳ ΑΠΔΕ (316), τουτ. καὶ ἡ γωνία ΒΔΕ ὀρθή ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΠΔΕ ὀρθή ἐστιν, ἄρα ἡ ΔΕ κάθετος ἐστὶ δυσὶ ταῖς ΒΔ, ΠΔ, καὶ ἐπομένως τῷ ὅλῳ ἐπιπέδῳ ΖΗ.

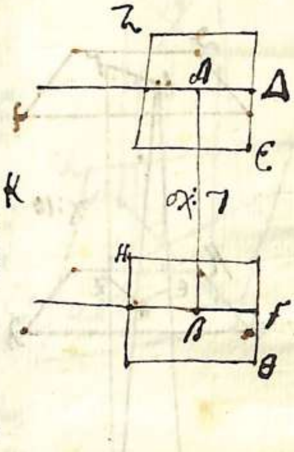
§323: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι καὶ δύο εὐθεῖαι ΑΠ, ΔΕ κάθετοι ἐπιπέδῳ τινὶ οὖσαι, καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι ἔσονται, εἰ δὲ μή, ἀχθείσης ἑτέρας τῆς ΔΗ φέρ' εἰπεῖν, παραλλήλου τῇ ΑΠ, κάθετος ἔσται τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ· τουτ. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο ἀνάγονται κάθετοι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐντεῦθεν δῆλον γίνεται ὅτι καὶ δύο εὐθεῖαι Κ, Μ τρίτῃ τινὶ τῇ Λ παράλληλοι οὖσαι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι ἔσονται· καθότι ἐπιπέδου τινὸς καθέτου τῇ Λ ἀχθέντος, καὶ αἱ Κ, Μ κάθετοι αὐτῷ ἔσονται, καὶ ἐπομένως παράλληλοι.



§324: Εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ:6) παράλληλος οὖσα εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΓΔ τῇ ἐπὶ ἐπιπέδου κειμένῃ, παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ἔσται· εἰ δὲ μή, τῇ ΓΔ συνεκβαλλομένη συναντήσει, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

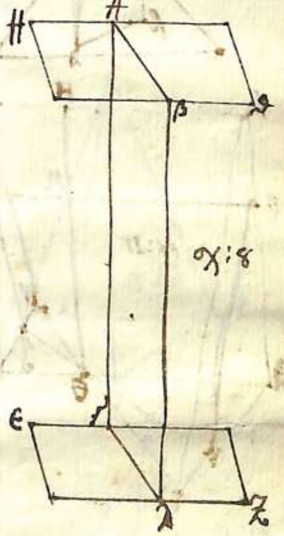
δύο ἐπι:

§325: Δύο ἐπίπεδα ΕΖ, ΗΘ (σχ: 7) ὀρθὰ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ὄντα, εἰς ἀλλήλους παράλληλα ἔσονται, ἐπεὶ δὲ μή, αἱ διὰ τῶν Α, Β ὁπωσοῦν κατ' ἀκολουθίαν ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΓ κάθετοι τῇ ΑΒ ἔσονται, καθά τι σημεῖον τῷ Κ, ἐκβαλλόμεναι συναντήσουσιν, ὅπερ ἀδύνατον.



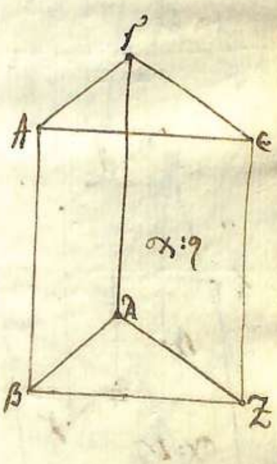
§326: Τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΕΖ (σχ: 8) τῶν ὑπό τινος ἐπιπέδου ΑΔ τεμνομένων, αἱ κοιναὶ τομαὶ, ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι ἔσονται· ἐπεὶ δὲ μή, τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπιπτουσῶν, καὶ τὰ ἐπίπεδα ἀλλήλοις συμπίπτουσιν, ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται.

§327: Ἡ ΑΒ (σχ: 7) κάθετος οὖσα ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ ΕΖ, κάθετος ἔσται καὶ τῷ αὐτῷ παραλλήλῳ ΗΘ· καθότι ἀχθείσης τῆς ΒΓ καὶ ἀφεσεως οὔσης διὰ τῶν ΑΔ, ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ ἀχθέντος, ἡ κοινὴ τομὴ ΑΔ παράλληλος ἔσται τῇ ΒΓ (326), καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑΔ ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἔσται καὶ ἡ ΑΒΓ, τουτ: ἡ ΑΒ κάθετός ἐστι τῇ ΒΓ. καὶ ἐπειδὴ αὕτη καὶ ὁπωσοῦν ἤχθη, δῆλον, ὅτι ἡ ΑΒ κάθετος ἔσται πάσαις ταῖς διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς Β, ἐπὶ τοῦ ΘΗ ἀγομέναις, καθέτως δηλ: τῷ ἐπιπέδῳ ΗΘ ἐφεστήσεται.



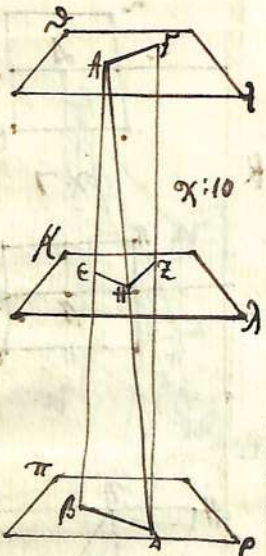
§328: Αἱ παράλληλοι ΑΓ, ΒΔ (σχ: 8) αἱ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΕΖ ἀποτεμνόμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καθότι ἀχθέντος τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ, αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι ἔσονται (326), καὶ ἑπομένως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον.

§329: Δύο γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ (σχ: 9) ἐπὶ διαφόρων κείμεναι ἐπιπέδων, ἔχουσαι δὲ καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διευθυνομένας διευθύνσιν ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, τὰ δὲ διὰ τῶν σημείων αὐτῶν ἀγόμενα ἐπίπεδα παράλληλα ὑπάρξουσιν· καθότι ληφθεισῶν τῶν ΑΓ=ΒΔ, τῶν ΑΕ=ΒΖ, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΓΕ, ΔΖ, τὰ ΑΔ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἔσονται, καὶ ἑπομένως ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος καὶ τῇ ΓΔ καὶ τῇ ΕΖ, ὅθεν καὶ ΓΔ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ (323)· τουτ: καὶ τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως ΓΕ=ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἰσογώνιον τῷ ΔΒΖ, καὶ ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ, ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ΑΓ, ΑΕ, καὶ αἱ ΒΔ, ΒΖ προσδιορίζουσι τὴν διάθεσιν τῶν δι' αὐτῶν διερχομένων ἐπιπέδων (314), αὗται δὲ αὐταῖς ἀλλήλαις παράλληλοι, ὥστε καὶ τὰ δι' αὐτῶν διερχόμενα ἐπίπεδα παράλληλα ἔσονται.



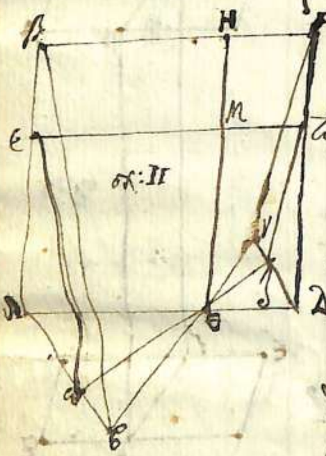
§330: Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ὑπὸ δύο τεμνόμενα ἐπιπέδων ΑΔ, ΑΖ, αἱ ὑπὸ τῶν κοινῶν τομῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (326, 329)

§331: Αἱ ΑΒ, ΓΔ (σχ: 10) εὐθεῖαι, αἱ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ΘΙ,



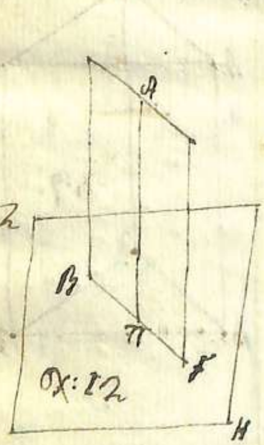
ΗΑ, περ τεμνόμενα, ἀναλόγως τεμοῦνται, δηλ: ἕξομεν ΑΕ:ΒΕ::ΓΖ:ΖΔ· καθότι ἀχθείσης τῆς ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων κατὰ τὰ Α, Η, Δ, τεμνομένης, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν κοινῶν τομῶν ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ, ἕξομεν ΑΕ:ΕΒ::ΑΗ:ΔΗ (326), ἀλλὰ ΑΗ:ΔΗ::ΓΖ:ΖΔ, ὥστε ἔσται καὶ ΑΕ:ΕΒ::ΓΖ:ΖΔ·

§332: Ἐὰν αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ, ΒΓ, ΑΔ (σχ:11) τετραπλεύρου τινός, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ, ἢ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένου, ἀναλόγως τμηθῶσιν ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, καὶ αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι ἀναλόγως ταῖς ἀντικειμέναις αὐταῖς πλευραῖς ἀλλήλας τμήσουσι· Ἐὰν δοθῇ, φέρ' εἰπεῖν, ΑΕ:ΒΕ::ΔΖ:ΓΖ, καὶ ΒΗ:ΓΗ::ΑΘ:ΔΘ, ἔσεται καὶ ΘΜ:ΗΜ::ΑΕ:ΒΕ, καὶ ΕΜ:ΖΜ::ΒΗ:ΓΗ· καθότι, ἀχθέντος διὰ τῆς ΑΔ τοῦ ἐπιπέδου ΑϬΘγΔ, διὰ δὲ τῶν σημείων Β, Ε, Γ, Ζ ἀχθεισῶν παραλλήλων τῇ ΗΘ τῶν Βϭ, Γγ, Εω, Ζζ, ἕξομεν ϭΘ:γΘ::ΒΗ:ΓΗ::ΑΘ:ΔΘ (229), ὥστε τὰ τρίγωνα ΑϭΘ, γΔΘ ὅμοιά εἰσιν, ἔχομεν δὲ καὶ Αω:ϭω::ΑΕ:ΒΕ::ΔΖ:ΓΖ::Δζ:γζ, ὥστε συνθέσομεν καὶ Αω:Αϭ::Δζ:Δγ, ἤγουν Αω:Δζ::Αϭ:Δγ, ἀλλὰ Αϭ:Δγ::ΑΘ:ΔΘ, ὥστε ἔσεται καὶ Αω:Δζ::ΑΘ:ΔΘ, δηλ: τὰ τρίγωνα ΑΘω, ΔΘζ ὅμοια, καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΑΘω=ΔΘζ, ἤγουν ἡ ωθζ εὐθεῖα ἔσται, αἱ δὲ ΕΖ, ΘΗ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖνται (314), καὶ τὸ Μ ἀλλήλας τέμνουσαν, ὅθεν ἕξομεν ΕΜ:ΜΖ::ωΘ:ζΘ::ΑΘ:ΔΘ· ὁμοίως ἀποδειχθήσεται, ἀχθέντος δηλ: ἐπιπέδου διὰ τῆς ΑΒ, ὅτι καὶ ΘΜ:ΗΜ::ΑΕ:ΒΕ·



§333: Ἡ δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα κλίσις ὑπὸ τῆς γωνίας καταμετρεῖται, τῆς διὰ δύο τῇ κοινῇ τομῇ καθέτων, ἐν ἑκατέρῳ ἐπιπέδῳ ἀγομένων σχηματιζομένης· καθότι ἡ τοιαύτη γωνία εἰς ὁποιονδήποτε τῆς κοινῆς τομῆς σχηματισθῇ σημεῖον, ἡ αὐτὴ διαπαντὸς ἐστι· καὶ διότι τῇ τοιαύτῃ γωνίᾳ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων συμμεταβάλλεται.

§334: Δύο τεμνομένων ἐπιπέδων αἱ περὶ τὴν κοινὴν τομὴν κλίσεις ἤτε γωνίαι ἴσαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἔσονται, αἱ δὲ προσεχεῖς ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, αἱ δὲ κατὰ κορυφὴν ἴσαι ἀλλήλαις ἀποδειχθήσονται· ὡσαύτως δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό τινος τεμνομένων ἐπιπέδου αἱ ἐντὸς γωνίαι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, αἱ δὲ ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσαι, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἔδειξεν.

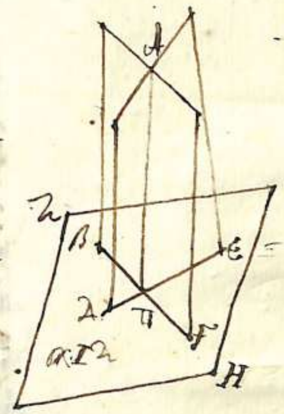


§335: Ἐπὶ ΔΠ (σχ:12) κάθετος τῇ ΖΗ ὑποτεθῇ ἐστι, ὁποιονδήποτε ἐπίπεδον ΑΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, κάθετον αὐτῷ ἔσται· καθότι τῆς ΒΓ κοινῆς τομῆς αὐτῶν ὑποτεθείσης, καὶ τῆς ΔΠ καθέτου αὐτῇ ἀχθείσης, ἔσται καὶ ἡ ΔΠΑ γωνία, ἡ κλίσις δηλ: τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ ὀρθή, δηλ: τὸ ἐπίπεδον ΑΒ κάθετον τῷ ΖΗ·

τοῦ ΑΒ ἐπι:

:ὑπάρχοντος

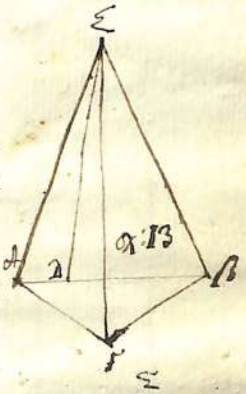
§336: Τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετον τῷ ΖΗ (σχ:12)· ἡ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐν αὐτῷ ἀγομένη κάθετος ΑΠ, κάθετος ἔσεται καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ. καθότι τῆς ΔΠ καθέτου τῇ ΒΓ ἀχθείσης, ἡ ΑΠΔ γωνία, κλίσιν τῶν ἐπιπέδων οὖσα, ὀρθὴ ἔσται· ἡ ΑΠ κάθετος ταῖς ΒΠ, ΔΠ, ἄρα τῷ ΖΗ ἀποδειχθήσεται (316).



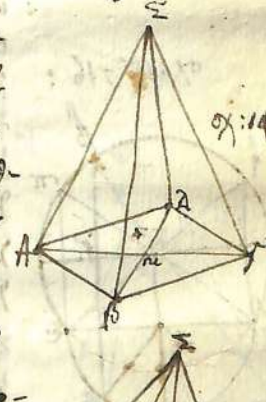
§337: Ἐκ τούτου μανθάνομεν, ὅτι τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καθέτου τῷ ΖΗ ὄντος, ἡ ΑΠ κάθετος, ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῷ ΖΗ ἀχθεῖσα, ἐν τῷ ΑΒ ἔσεται· εἰ δὲ μή, ἑτέρα τις ἀπὸ τοῦ σημείου Π ἐν τῷ ΑΒ ἀγομένη, κάθετος ἔσται τῷ ΖΗ, (336), καὶ τότε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύο ἄγονται κάθετοι, ὅπερ ἀδύνατον.

§338: Δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΑΔ (σχ:12) καθέτων ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ ΖΗ ὄντων, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΠ κάθετος τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ ἔσεται· καθότι ἀπὸ τοῦ Π κάθετος ἀχθεῖσα ἡ ΑΠ, καὶ ἐν τῷ ΑΒ, καὶ ἐν τῷ ΑΔ ἔσεται (337), ἤτοι κοινὴ αὐτῶν τομή, ὥστε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν καθέτων ἐπιπέδων, κάθετος ἔσται τῷ ΖΗ.

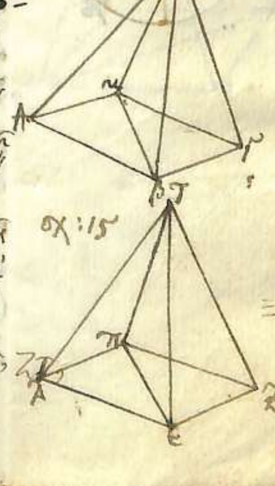
§339: Στερεᾶς τινος γωνίας Σ (σχ:13) ὑπὸ τριῶν σχηματιζομένης ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, μία τις ἡ ΑΣΒ μείζων ἑκατέρας τῶν λοιπῶν ἔσται, ἐλάσσων ἔσται τοῦ κ.φ. αὐτῶν· καθότι τῆς γωνίας $B\Sigma\Delta = B\Sigma\Gamma$ κατασκευασθείσης, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ΑΒ, καὶ ληφθείσης τῆς $\Sigma\Gamma = \Sigma\Delta$, ἀχθεισῶν καὶ τῶν ΑΓ, ΒΓ τὰ τρίγωνα ΒΣΔ, ΒΣΓ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται, καὶ ἑπομένως $B\Gamma = B\Delta$ ὥστε $A\Gamma > A\Delta$ ἀποδειχθήσεται, καὶ ἑπομένως ἡ γωνία $A\Sigma\Gamma > A\Sigma\Delta$. ὅθεν ἕξομεν $A\Sigma B < A\Sigma\Gamma + B\Sigma\Gamma$.



§340: Τὸ κ.φ. πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν στερεὰν γωνίαν Σ (σχ:14) σχηματιζουσῶν, ἔλαττόν ἐστι 4 ὀρθῶν. καθότι τῶν τὴν στερεὰν γωνίαν σχηματιζόντων ἐπιπέδων, διὰ τοῦ ΑΒΓΔ τμηθέντων, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν Ακ, Βκ, Γκ, Δκ, τὰ ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου σχηματιζόμενα τρίγωνα ἰσάριθμα ἔσονται τοῖς ἐπὶ τῶν τεμνομένων σχηματιζομένοις, καὶ ἑπομένως τὸ κ.φ. τῶν γωνιῶν τῶν πρώτων ἴσον ἐστὶ τῷ κ.φ. τῶν γωνιῶν τῶν δευτέρων, ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ κτλ ἐλάσσονές εἰσι τῶν ΑΒΣ + ΓΒΣ, ΒΓΣ, ΔΓΣ κτλ (339), ὥστε αἱ περὶ τὸ κ γωνίαι μείζονες ἔσονται τῶν περὶ τὸ Σ. ἐπεὶ δὲ αἱ πρῶται τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὥστε αἱ δεύτεραι ἐλάσσονες 4 ὀρθῶν ἀποδειχθήσονται.



§341: Δύο στερεῶν γωνιῶν Σ, Τ (σχ:15) ὑπὸ τριῶν ἴσων γωνιῶν σχηματιζομένων, ἡ κλίσις δύο τινῶν ἐπιπέδων ἑτέρας γωνίας ἴση ἐστὶ τῇ κλίσει τῶν αὐτῶν ὁμολόγων τῆς ἑτέρας· καθότι ὑποτεθείσης τῆς γωνίας $A\Sigma\Gamma = \Delta T Z$, $A\Sigma B = \Delta T E$, $B\Sigma\Gamma = E T Z$, ληφθείσης δὲ καὶ τῆς $B\Sigma = TE$, ἀχθείσης δὲ καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β καθέτου τῆς Βκ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΣΓκ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε τῆς ΕΠ τῷ ΔΤΖΠ, ἔτι δὲ καὶ τῶν Α
+ ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν καθέτων Ακ, Γκ ταῖς ΑΣ, ΓΣ, καὶ τῶν ΔΠ, ΖΠ ταῖς ΔΤ, Ζ



θέσιν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΣΚ, ΠΤ ἀχθεισῶν, τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΔΤΕ ὀρθογώνια κατὰ τὰς Α, Δ, γωνίας ὄντα (320), ἔχοντα δὲ καὶ τὰς πρὸς τῷ Σ καὶ Τ ἴσας, καὶ τὴν ΣΒ = ΤΕ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται, καὶ ἀκολούθως ΑΣ = ΔΤ, καὶ ΑΒ = ΔΕ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἀποδειχθήσεται, καὶ ΣΓ = ΤΖ καὶ ΒΓ = ΕΖ, ἀκολούθως δὲ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΣΓΚ = ΔΤΖΠ ὑπάρξει, καθότι ἡ μὲν πρὸς τῷ Σ γωνία τῇ πρὸς τῷ Τ ἐφαρμόζει, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΔΤ, καὶ ἡ ΣΓ τῇ ΤΖ, καὶ ἀκολούθως ἡ ΑΚ καθέτως τῇ ΔΠ, καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΖΠ, ὥστε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ, ΔΠΕ, ἔχοντα τὴν ΑΒ = ΔΕ, τὴν ΑΚ = ΔΠ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. Ὅθεν καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ἤτοι ἡ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, ΑΣΓ κλίσις ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ, τῇ κλίσει δηλ: τοῦ αὐτοῖς ὁμοίου. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ κλίσις τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

§ 342: Ἐκ τούτου δῆλον γίνεται ὅτι αἱ ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀλλήλαις ἴσων καὶ ὁμοίως τεθειμένων συγκείμεναι στερεαί, ἀλλήλαις ἐφαρμόζονται καὶ ἴσαι εἰσί. καθότι τὸ τετράπλευρον ΑΣΓΚ ἐπὶ τὸ ΔΤΖΠ ἐφαρμοσθήσεται, καὶ ἡ ΒΚ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΠΕ, καὶ ἡ ΒΣ ἐπὶ τῆς ΤΕ, καὶ ἀκολούθως ἡ Σ γωνία ἐπὶ τῆς Τ ἐφαρμοσθήσεται. τῶν δὲ ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν ἀνομοίως κειμένων, αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι κατὰ συμμετρίαν, ~~[illegible]~~ [illegible] ὀνομάζονται.

Πρόβλημα ια

§ 343: Δοθεισῶν τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, τὴν στερεὰν Σ (σχ: 15) συναπαρτιζουσῶν, τὴν κλίσιν δύο τινῶν, οἷον τῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, τουτ: τὴν γωνίαν ΒΑΚ ἐν ἐπιπέδῳ καταγράψαι. Κατασκευασθείσης τῆς γωνίας Β′ΣΑ′ = ΒΣΑ, Α′ΣΓ′ = ΑΣΓ, Γ′ΣΒ″ = ΓΣΒ (σχ: 15, 16)

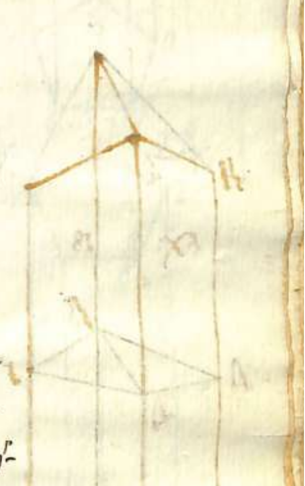
σχ: 15, 16.

ληφθείσης δὲ καὶ τῆς Β′Σ = Β″Σ = ΒΣ, ~~[illegible]~~ ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς Β′Γ′ τῇ ΣΓ′ καθέτου, τῆς δὲ Α′Β′ τῇ Α′Σ, καὶ ἐκβαλλομένης μέχρι τοῦ σημείου κ, καθ' ὃ ἀμφότεραι συναλῶσιν ἀλλήλαις, κέντρῳ δὲ τῷ Α′, καὶ διαστήματι τῷ Α′Β′ τῆς περιφερείας ΕΒ′Β γραφείσης, ἀχθείσης δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῆς Βκ καθέτου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β, καθ' ὃ ἡ περιφέρεια ἡ κάθετος συναντᾷ, ἀχθείσης τῆς Α′Β, ἡ γωνία ΒΑ′κ ἡ ζητουμένη ἐστὶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΣΑ, ΑΣΓ κλίσις. καθότι τὸ μὲν τρίγωνον Α′Β′Σ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΣ, τὸ δὲ Γ′ΣΒ″ τῷ ΓΣΒ, καὶ ἀκολούθως Α′Σ = ΑΣ, Α′Β′ = ΑΒ, ΣΒ″ = ΣΒ, ΣΓ′ = ΣΓ. Ὅθεν καὶ τὸ τετράπλευρον Α′ΣΓ′κ τῷ ΑΣΓκ ἐφαρμόζεται, καὶ Ακ = Α′κ ἔσεται, ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑ′κ = ΒΑκ ~~καὶ~~ καὶ ἀκολούθως ἡ γωνία ΒΑ′κ = ΒΑκ ὑπαρχθήσεται.

§ 344: Τριῶν καθ' ἀρέσκειαν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, στερεὰν γωνίαν κατασκευάσαι. Παρατηρητέον αον ὅτι, τὸ κεφ: τῶν τριῶν ἔλασσον 4 ὀρθῶν εἶναι δεῖ (340). Παρατηρητέον 6ον ὅτι, ἡ τρίτη ἡ μόνον ἐλάσσων τῶν λοιπῶν δύο (339), ἀλλὰ καὶ μείζων τῆς διαφορᾶς αὐτῶν εἶναι· καθότι, ὑποτεθείσης οὖν καθ' ἀρέσκειαν λαμβανομένων τῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ἡ τρίτη ΓΣΒ τοσαύτη

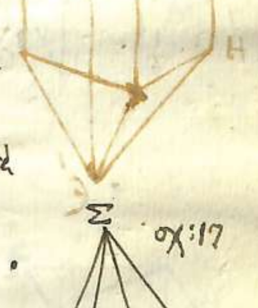
ἆξαι, ὥστε τὰς ἀπὸ τοῦ Β' τῇ ΓΣ καταγραφείσας καθέτους, καὶ ἐπιζευγνυ-
μένας τῇ ΕΒ' διαμέτρῳ μεταξὺ τῶν σημείων Β, Ε συναντᾶν. ὅθεν
αἱ τοιαῦται κάθετοι ὁμοίως τὰ Β, Ε σημεῖα οὐχ ὑπερβαίνουσαι, ἀλλ' οὐδὲ
κατ' αὐτὰ τῇ ΒΕ συναντῶσαι, τουτ. τὰ Β, Ε ὅρια τῆς τοιαύτης ἔσονται
συναντήσεως. ἐκ τέλους ποιοῦν τῶν σημείων τῶν Β, Ι, Ε, Π καθέτων τῇ ΣΓ
ἀχθησῶν, πρὸς δὲ καὶ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΣΙ, ΣΠ, ΣΕ, ἡ γωνία ΓΣΙ=
ΓΣΒ' = ΓΣΑ + ΑΣΒ' ἔσονται. ἡ δὲ ΓΣΠ = ΓΣΕ = ΑΣΓ − ΑΣΕ = ΑΣΓ −
ΑΣΒ' ἀφαιρήσεται. τουτ. πρὸς λύσιν τοῦ τοιούτου προβλήματος ἀνάγκη τὴν τρίτην
γωνίαν μὴ μόνον ἐλάσσονα εἶναι τὸ κ.φ. τῶν ἀφαιρεσῶν δύο, ἀλλὰ καὶ μεί-
ζονα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ὅθεν ὁσάκις τοῦτο δοθῇ, καὶ τὸ πρόβλημα δυνα-
τὸν εἶναι.

§345. Δύο δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ (σχ:16), καὶ τῆς κλί-
σεως αὐτῶν, τὴν τρίτην εὑρεῖν γωνίαν, δι' ἧς ἡ στερεὰ συμπληρωθήσεται.
Ληφθήσεται τῆς ΣΒ καθ' ἀρέσκειαν, ἀχθήσεται δὲ καὶ τῇ ΒΕ κάθετος τῇ
ΑΣ, καὶ κατασκευασθήσεται καὶ τῆς γωνίας ΒΑΕ ἴσης τῇ κλίσει τῶν δοθεισῶν
γωνιῶν, ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου, καθ' ὃ ἡ ΑΒ τὴν κέντρῳ μὲν τῷ Α δια-
στήματι δὲ τῷ ΑΒ' γραφθείσῃ περιφερείᾳ συναντᾷ, ἀχθήσεται τῇ ΑΕ κάθε-
τος τῆς Βκ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ τῇ ΣΓ ἀχθήσεται κάθετος τῆς κΒ'', ἐπιζευχθεί-
σης δὲ καὶ τῆς ΣΒ'' ἀπὸ τοῦ σημείου Β, καθ' ὃ ἡ κΒ'' τὴν κέντρῳ μὲν
τῷ Σ, διαστήματι δὲ τῷ ΣΒ' γραφθείσῃ περιφερείᾳ συναντᾷ, ἡ ΓΣΒ'' γω-
νία ἡ ζητουμένη ἔσται. καθότι τῆς Σ γωνίας διὰ τῶν ΒΣΑ, ΑΣΓ, ΓΣΒ''
κατασκευασθείσης, κλίσις τῶν ΒΣΑ, ΑΣΓ ἔσεται ἡ ΒΑΕ (343), ἤγουν
ἡ δοθεῖσα κλίσις ἡ ΒΑΕ, δι' ἧς ἡ ΓΣΒ'' προσδιορίζεται, ὥστε ἐκ τούτου
τοῦτο ἡ ΓΣΒ ἡ ζητουμένη ἔσεται τρίτη γωνία, δι' ἧς ἡ στερεὰ συμπληροῦται.



§346. Τῆς δὲ στερεᾶς γωνίας Σ (σχ:17) ἐκ τεσσάρων συγκειμένης γωνιῶν
οἷον τῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΑ, ἀδύνατον τῶν ἐπιπέδων γω-
νιῶν γινωσκομένων, τὴν κλίσιν δύο τινῶν, ὅτε τὴν στερεὰν προσδιο-
ρίσαι γωνίαν. καθότι, διὰ τῶν τοιούτων γωνιῶν διάφοροι σχηματίζου-
στερεαὶ αἱ ἐκ τῆς διαφόρου κλίσεως αὐτῶν, δοθείσης δὲ τῆς κλίσεως δύο
τινῶν τῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, φέρ' εἰπεῖν, καὶ τοῦ ποσοῦ, ὅτε ἡ στερεὰ γω-
νία προσδιορίζεται· καθότι, τῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, φέρ' εἰπεῖν, γνωστῶν ὄ-
ντων, πρὸς δὲ καὶ τῆς κλίσεως αὐτῶν, καὶ ἡ ΑΣΓ γνωσθήσεται, καὶ
ἐπομένως, ἡ ἐκ τριῶν ΑΣΓ, ΑΣΔ, ΓΣΔ, καὶ ὅλη ἡ Σ προσδιο-
ρισθήσεται· ὅθεν δὲ ἡ στερεὰ ἐκ πέντε σύγκειται ἐπιπέδων γωνιῶν,

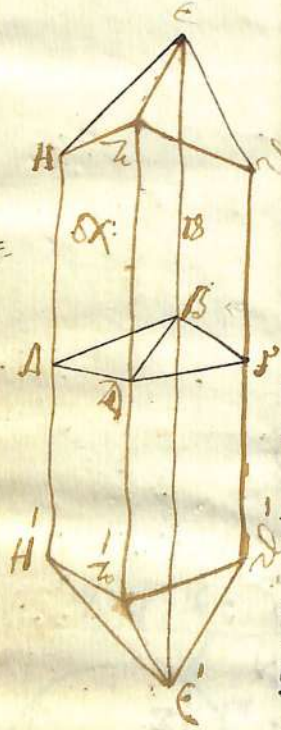
σχ:17



τότε δύο πλευρῶν διδομένων, προσδιορίζεται· ὅταν δὲ ὑπὸ 6,3 διδομένων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐφεξῆς.

Περὶ Πολυέδρων θεωρήματα.

§347: Δύο πολύεδρα τὰς αὐτὰς καὶ ἰσαρίθμους ἔχοντα κορυφὰς τῶν ἐπ' ἴσων, καὶ ὡσαύτως τεθειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, συγκειμένων στερεῶν, ἀλλήλοις ἐφαρμόζουσι, καὶ τὸ αὐτὸ συναπαρτίζουσι πολύεδρον. καθότι, πασῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀλλήλαις ἐφαρμοζομένων, καὶ αἱ πλευραὶ ἀλλήλαις ἐφαρμόσουσιν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ ἕδραι, καὶ τὸ αὐτὸ συμπεριλήψονται πολύεδρον.



§348: Δύο σύμμετρα πολύεδρα, κοινὴν τὴν βάσιν ἔχοντα, τὰς δὲ στερεὰς γωνίας ἐξ ἴσου ἀπ' αὐτῆς ἀπεχούσας, καὶ ἑκατέρωθεν ὡσαύτως κατεσκευασμένα ὄντα, ἔχουσι τὰς ὁμολόγους ἕδρας, καὶ τὰς κλίσεις αὐτῶν ἴσας· καθότι, ὑποτεθέντων τῶν ε, Η, Ζ (σχ: 18) στερεῶν γωνιῶν θατέρου πολυέδρου, καὶ τῶν ε', Η', Ζ' τοῦ ἑτέρου, καὶ ΑΗ, ΑΗ', ΑΖ, ΑΖ', τῶν ἀποχώσεων αὐτῶν, τὸ τετράπλευρον ΑΖ, περὶ τὴν ΑΔ περιστρεφόμενον, ἐπὶ τὸ ΑΖ' ἐφαρμόζεται, καὶ ἴσον αὐτῷ ἐστί, καὶ ἐπομένως ΗΖ=Η'Ζ'. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ἡ εΗ=ε'Η', καὶ ἡ εΖ=ε'Ζ', ὅθεν γίνεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΗεΖ=Η'ε'Ζ', ὡσαύτως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον Ζεθ=Ζ'ε'θ' ἐστί, καὶ τὸ λοιπὸν ἐφεξῆς. ἐπειδὴ δέ, καὶ αἱ γωνίαι ΗεΖ, Ηεθ, Ζεθ, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ ε συναπαρτίζεται, ἴσαι ταῖς Η'ε'Ζ', Η'ε'θ', Ζ'ε'θ' εἰσί, ταῖς τὴν ε' συναποτελούσαις, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ κλίσις τῶν ΗεΖ, Ζεθ ἴση τῇ κλίσει τῶν αὐταῖς ὁμολόγων Η'ε'Ζ', Ζ'ε'θ' ἐστί.

§349: Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὰ σύμμετρα πολύεδρα, καὶ μηδόλως ἀλλήλοις ἐφαρμόζοντα, ἴσα εἰσί.

§350: Δύο πρίσματα μίαν στερεὰν γωνίαν τὴν 6, 6' (σχ: 19) φερ..., ὑπὸ τριῶν ἀλλήλοις ἴσων, καὶ ὁμοίως τεθειμένων ἐπιπέδων περιεχομένην ἔχοντα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί· καθότι, τῆς γωνίας 6 ἐπὶ τὴν 6' ἐφαρμοσθείσης, τοῦτ' ἔστι τῆς βάσεως αδ, ἐπὶ τὴν α'δ', καὶ τὸ παραλληλόγραμμον 6ζ ἐπὶ τὸ 6'ζ', καὶ τὸ 6θ ἐπὶ τὸ 6'θ', καὶ ἡ δΙ ἐπὶ τὴν δ'Ι', καὶ ἡ ακ ἐπὶ τὴν α'κ' ἐφαρμοσθήσεται, καὶ ἑπομένως τὸ πρίσμα αΙ ἴσον α'Ι' ἔσεται.

§351: Παντὸς παραλληλεπιπέδου τὰ ἀντικείμενα ἐπίπεδα ἴσα καὶ παράλληλά εἰσιν. ἐπειδὴ καὶ αἱ βάσεις ΑΓ, ΕΗ, (σχ: 20) ἴσαι καὶ παραλληλόγραμμα· τοῦτ' ἔστιν ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΕΖ, ἔσεται καὶ ἡ ΑΕ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΖ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ ἴση καὶ παράλληλός ἐστι τῇ ΒΓ, ὥστε καὶ ἡ γωνία ΕΑΔ = ΖΒΓ ἔσται (329), καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἴσον τῷ ΒΗ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ ΑΖ ἴσον ἀποδειχθήσεται δὲ καὶ τοῦ ... τὸ αι προσδιορισθήσεται.

351: Παντὸς πρίσματος αἱ βάσεις ... ἴσαι ... ἀλλήλαις ... καθότι διὰ τὸν 6 ... ἴσον καὶ παράλληλον ... τὸν 6 ...

καὶ παράλληλον τῷ ΔΗ ἀποδείκνυται.

§353. Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀντικείμεναι γωνίαι συμμετρικαί εἰσιν, αἱ δὲ διαγώνιαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας τμήματα. καθότι ἡ μὲν γωνία ΒΖΕ = FΗΘ = FΔΘ ἐστὶ (σχ: 20), ἡ δὲ ΕΖΗ = ΑΒF = ΑΔF, καὶ ἡ ΒΖΗ = ΑΕΘ = ΑΔΘ, καὶ ἑπομένως ἡ Ζ = Δ κατὰ συμμετρίαν. ὡσαύτως ἀποδειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἀντικείμεναι τοῦ παραλληλεπιπέδου γωνίαι συμμετρικαί, ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΗF αἱ διαγώνιοι ΑΗ, FΕ, εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας τμήματα, τούτων δὲ ἡ μὲν ΑΗ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΘ εἰς ἴσα τέμνεται τῇ ΒΘ, ἡ δὲ FΕ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον FΔΕΖ εἰς ἴσα τῇ ΔΖ, δῆλον ὅτι καὶ αἱ 4 τοῦ παραλληλογράμμου διαγώνιοι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας τμήματα καθ᾽ ἓν σημεῖον, ὅπερ καὶ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου ὀνομάζεται.

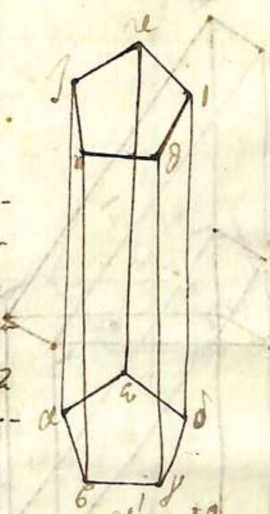
§354. Τὸ διὰ τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἐπίπεδον ΒΘ (σχ: 20) τέμνει τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο συμμετρικὰ πρίσματα, καθότι ΑΖ = ΔΗ ἐστὶ καὶ =FΖ, καὶ ΕΖΘ = ΑΒΔ = ΒFΔ = ΖΗΘ. Ὅθεν δῆλον γίνεται ὅτι ὁποιονδήποτε τριγωνικὸν πρίσμα ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει ἰσοϋψοῦς παραλληλεπιπέδου, καὶ διπλασίαν τὴν βάσιν ἔχοντος.

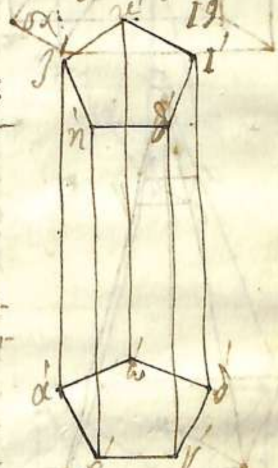
§355. Ἐὰν τὸ μὴ παράλληλον τῇ βάσει πρίσματος, ἡ παραλληλεπιπέδου τομὴ ἴση τῇ αὐτοῦ βάσει ἐστί, καθότι, ἐπειδὴ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν τοίχων αὐτοῦ παράλληλοί εἰσι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς παραλλήλου τομῆς ἴσαι ταῖς αὐτῶν παραλλήλοις τῆς βάσεως ἔσονται, ἐπομένως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δύο προσεχῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι ἴσαι ταῖς διὰ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν σχηματιζομέναις ἀποδειχθήσονται, καὶ ἡ τομὴ ἴση τῇ βάσει ἐστί.

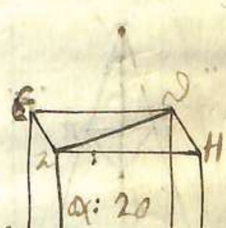
§356. Παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος γινομένῳ ἐστί, καθότι τῆς βάσεως αὐτοῦ τοσάκις ἀναληφθείσης ὅσον τὸ ὕψος ἐστί, τὸ παραλληλεπίπεδον παραχθήσεται. Ὅθεν ὀνομασθείσης β τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ τὸ στερεὸν ἔσται βυ, ἐὰν β = αδ δοθῇ, τὸ ζητούμενον στερεὸν ἀποδείκνυται αδυ.

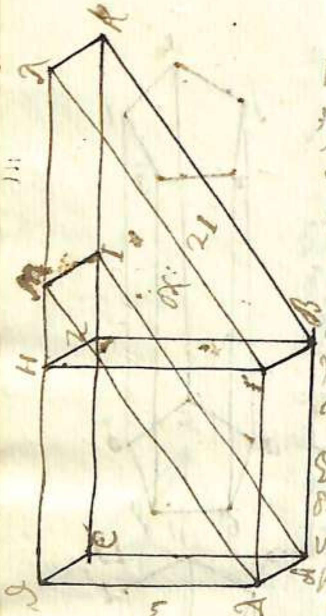
§357. Δύο παραλληλεπίπεδα ἴσην τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἔχοντα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καθότι, ἐπειδὴ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι Ε, Ζ (σχ: 21) ὑπὸ τριῶν ἀλλήλοις ἴσων ἐπιπέδων σχηματίζονται, δῆλον ὅτι τὸ πρίσμα ΑΕΙΚΛΘΔ = ΒΖΚΛΗF ἔσται (350), ἀφαιρεθέντος μὲν τοῦ πρώτου, τὸ 2ον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τοῦ ὅλου παραχθήσεται σχήματος. ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ 2ου τὸ ΔΙ καὶ ἄρα ΔΙ = ΔΚ ἔσται.

§358. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ ὁποιονδήποτε παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ καὶ βάσιν ἴσην ἔχοντα ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσα ἔσονται, καὶ ὅτι παντὸς παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ





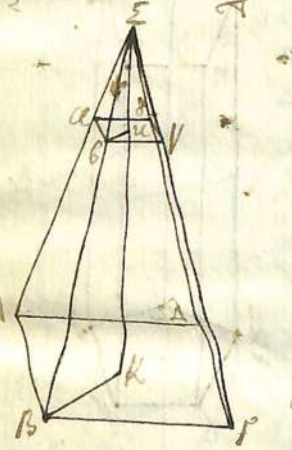




γινομένῳ συρεθήσεται· ὥστε καὶ δύο ὁποῖα δήποτε παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ τοιαῦτα γινόμενα, ἤτε ὡς τὰ γινόμενα ~~ὡς τὰ γινόμενα~~ τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων·

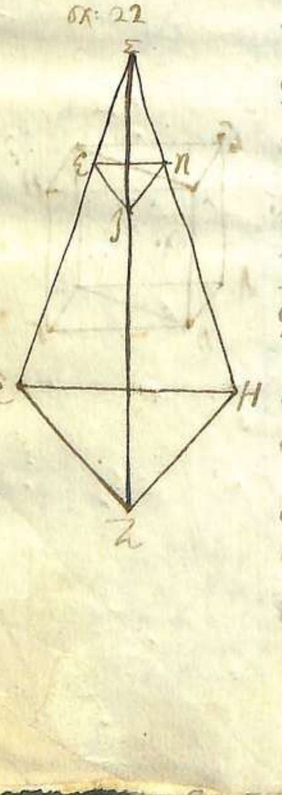
Ἔστω γὰρ ἤτοι ὁ γινόμενον β τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου π, καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, Β δὲ τῆς βάσεως τοῦ Π, καὶ V τοῦ ὕψους, ἕξομεν π : Π :: βυ : ΒV. ὅθεν καὶ β = Β ὑποτεθείσης, ἔσται π : Π :: υ : V, ὑποτεθέντος δὲ υ = V, συρεθήσεται π : Π :: β : Β. τουτ: τὰ ἰσοϋψῆ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις, τὰ δὲ τὰς βάσεις ἴσας ἔχοντα, πρὸς ἄλληλα ἐστὶν, ὡς τὰ ὕψη, ἐὰν δὲ π = Π δοθῇ, ἔσται βυ = ΒV, καὶ β : Β :: V : υ τουτ: τῶν ἴσων παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

§359: Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁποῖον δήποτε τριγωνικὸν πρίσμα τὸ ἥμισυ ἐστὶν ἰσοϋψοῦς διπλασίαν τὴν βάσιν ἔχοντος παραλληλεπιπέδου, δῆλον, ὅτι καὶ παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ γινομένῳ, ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶν πρίσμα εἰς τοσαῦτα διαιρεῖται τριγωνικὰ εἰς ὅσα καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ τρίγωνα, ἕπεται ὅτι καὶ παντὸς πρίσματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ γινομένῳ, ὥστε καὶ ἐπὶ τῶν πρισμάτων αἱ αὐταὶ ταῖς τῶν παραλληλεπιπέδων θεωρηθήσονται ἀναλογίαι.



σχ: 22

§360: Πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλως τῇ βάσει τμηθείσης, αἱ μὲν πλευραὶ ἀναλόγως τῷ ὕψει τμηθήσονται, ἡ δὲ τομὴ ὅμοιον τῇ βάσει ἔσται πολύγωνον, καθότι, ἐπειδὴ αἱ αβ, βγ, γδ, &c (σχ:22) παράλληλοι ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, &c, ἕξομεν ΑΣ : αΣ :: ΒΣ : βΣ :: ΓΣ : γΣ :: &c. ὑποτεθέντος δὲ καὶ ΣΚ ὕψους τῆς πυραμίδος, ἔσται καὶ βκ παράλληλος τῇ ΒΚ. ὅθεν ἕξομεν καὶ ΒΣ : βΣ :: ΚΣ : κΣ, καὶ ἑπομένως ΑΣ : αΣ :: ΚΣ : κΣ :: ΓΣ : γΣ :: &c. ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ γωνία αβγ = ΑΒΓ ἐστί, καὶ ΒΓΔ = βγδ, &c. πρὸς δὲ τούτοις καὶ αβ : ΑΒ :: βγ : ΒΓ :: &c, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τομὴ αγ ὅμοιον τῇ βάσει ΑΓ ἔσται πολύγωνον.



§361: Δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, καὶ διὰ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ παραλλήλως τῇ βάσει τμηθεῖσαι, ἕξουσι τὰς τομὰς αὐτῶν ἀνάλογα ταῖς βάσεσι· καθότι, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἕξομεν αγ : ΑΓ :: αβ : ΑΒ :: αΣ : ΑΣ :: εζ : ΕΖ :: εζη : ΕΖΗ, καὶ ἑπομένως αγ : ΑΓ :: εζη : ΕΖΗ. ἤτε αγ : εζη :: ΑΓ : ΕΖΗ.

§362: Δύο τριγωνικαὶ ὅμοιαι πυραμίδες τὰς μὲν ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας, τὰς δὲ ὁμολόγους ἕδρας, ὁμοίας ἔχουσι· καθότι τῆς ΒΘ = ΔΕ (σχ:23) τμηθείσης, τῆς ΒΙ = Εδ, καὶ τῆς ΒΗ = Εζ, ἔσται καὶ ΘΙ = ΔΓ, ΘΗ = Δζ, ΗΙ = ζδ, καὶ ἑπομένως ἡ ἕδρα ΘΗΙ = Δδζ, καὶ ἡ πυραμὶς ΒΘΗΙ = ΕΔζδ· καὶ ἡ γωνία Β = Ε· ἐπεὶ δὲ καὶ ΘΗ, ΘΙ, ΗΙ παράλληλοι ταῖς ΔΓ, ΔΣ, ΓΣ, ὥστε καὶ ἡ ἕδρα ΘΗΙ, ἤτε ἡ Δδζ ὁμοία ἐστὶ τῇ ὁμολόγῳ αὐτῇ ΔΣΓ.

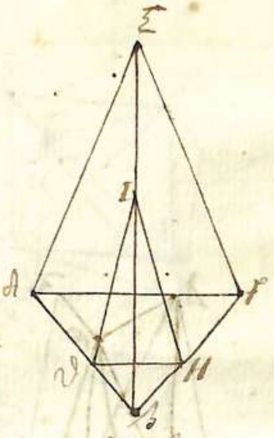
§363: Ἐπειδὴ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἔχομεν ΑΒ:ΔΕ::ΒΓ:ΕΖ::ΑΓ:ΔΖ::ΑΣ:ΔΘ::Σ, ἔπεται, ὅτι τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογοί εἰσιν, ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι ἴσαι ἁπλῶς εἰσι, δῆλον, ὅτι καὶ ἡ κλίσις δύο ἐπιπέδων ἴση ἐστὶ τῇ κλίσει τῶν αὐτῶν ὁμολόγων.

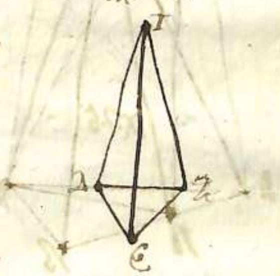
§364: Ἕπεται πρὸς τούτοις ὅτι πάσης πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου τῇ βάσει παραλλήλου τεμνομένης, ἡ κατὰ μέρος πυραμὶς Σαβγδ ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ πυραμίδι ΣΑΒΓΔ (σχ:22)· καθότι καὶ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι ὅμοιαι εἰσί, καὶ αἱ κλίσεις δύο ἐπιπέδων ἴσαι ταῖς τῶν ὁμολόγων· ἡ δὲ τομὴ αβγ ὁμοία τῇ βάσει ΑΓ ἐστι, αἱ στερεαὶ γωνίαι α, β, γ ἴσαι ταῖς αὐτῶν ὁμολόγοις ἔσονται.

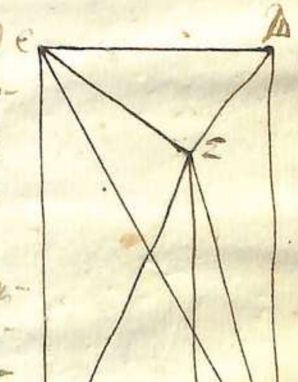
§365: Ἐκ τῶν ἄνω μανθάνομεν πρὸς τούτοις, ὅτι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους ἔχουσαι, ὅμοιαι ἀλλήλαις εἰσί· καθότι ὑποτεθέντος (σχ:23) ΑΒ:ΔΕ::ΒΓ:ΕΖ::ΑΓ:ΔΖ::ΑΣ:ΔΘ, ἔσονται καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΣ, ΑΒΓ ὅμοια τοῖς ΔΕΘ, ΔΕΖ ἐξ οὗ δῆλον γίνεται ὅτι καὶ αἱ πυραμίδες ὅμοιαι ἀλλήλαις εἰσίν.

§366: Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς τὸ τρίτον ἐστὶ ἰσοϋψοῦς, καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος τριγωνικοῦ πρίσματος· καθότι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ (σχ:24) ἀπὸ τοῦ τριγωνικοῦ ἀφαιρεθείσης πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ, ἥτις τῆς διαγωνίου ΓΕ ἀχθείσης εἰς δύο ἰσοϋψεῖς καὶ ἴσας βάσεις ἐχούσας διαιρεῖται τριγωνικὰς πυραμίδας, καὶ ἐπομένως ἴσας. τούτων δὲ ἡ ΣΓΔΕ ἰσοϋψὴς οὖσα, καὶ ἴσην ἔχουσα βάσιν τῇ ΣΑΒΓ, ἴση αὐτῇ ἐστίν. ὥστε τὸ τριγωνικὸν πρίσμα εἰς τρεῖς ἴσας διαιρεῖται τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐξ οὗ δῆλον γίνεται, ὅτι ἡ ΣΑΒΓ τριγωνικὴ πυραμὶς τὸ τρίτον ἐστὶ τοῦ ἰσοϋψοῦς καὶ ἴσην βάσιν ἔχοντος τριγωνικοῦ πρίσματος. ὅθεν ὀνομασθείσης β τῆς βάσεως τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτῆς, τὸ στερεὸν ἔσται $\frac{βυ}{3}$.

§367: Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι πάσης πυραμίδος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ τρίτου τοῦ ὕψους αὐτῆς γινομένῳ· καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶσα πυραμὶς εἰς τοσαύτας διαιρεῖται τριγωνικάς, εἰς ὅσα ἡ βάσις αὐτῆς τρίγωνα, ἔστι δὲ ἑκάστη τριγωνικὴ ἴση τῷ ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους γινομένῳ, ὥστε καὶ πάσης τὸ στερεὸν τῷ ἀπὸ

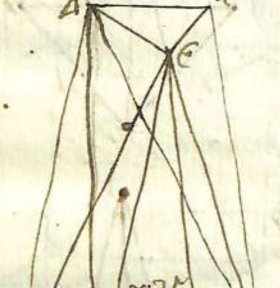






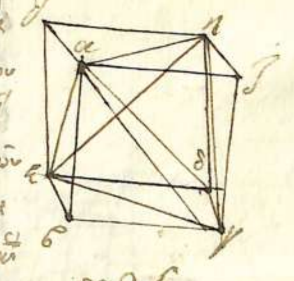
βάσεων ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους γινόμενον ἐξισωθήσεται. Ὅθεν ὀνομασθείσης β τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος π, τὸ δὲ ὕψος υ, καὶ B τῆς βάσεως τῆς Π, τὸ ὕψος δὲ Y, ἕξομεν $\pi : \Pi :: \frac{\beta\upsilon}{3} : \frac{BY}{3}$, ὥστε αἱ ἐπὶ τῶν πυραμίδων ἐν αὐταῖς τοῖς παραλληλεπιπέδοις καὶ πρίσμασι θεωρηθήσονται εἰσαγω... ἐς 358

§368. Δύο ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (σχ. 22)· καθότι τῆς ἐλάσσονος $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta$ εἰς τὴν μείζονα ἐφαρμοσθείσης, ἔσται διὰ τὸ παράλληλον τῶν βάσεων $\Sigma\delta : \Sigma\kappa :: \Sigma\delta : \Sigma\alpha :: AB : \alpha\beta$, καὶ $\frac{\Sigma K}{3} : \frac{\Sigma\kappa}{3} :: AB : \alpha\beta$, ἀλλὰ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν βάσεων ἔχομεν $A\Gamma : \alpha\gamma :: AB^2 : \alpha\beta^2$. Ὥστε τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν πολλαπλασιάσαντες, εὑρήσομεν $A\Gamma \cdot \frac{\Sigma K}{3} : \alpha\gamma \cdot \frac{\Sigma\kappa}{3} :: AB^3 : \alpha\beta^3$.

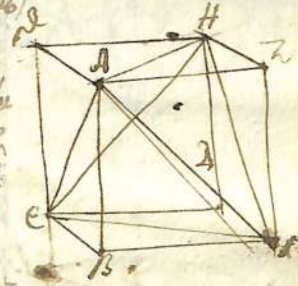


§369 Πάσης πυραμίδος διὰ παραλλήλου τῇ βάσει ἐπιπέδου τμηθείσης, τὸ ἀναπληρωθὲν πυραμιδικὸν τμῆμα εἰς τρεῖς διαιρεῖται ἰσοϋψεῖς τῷ τμήματι πυραμίδας, ὧν ἡ μὲν θατέραν τοῦ τμήματος ἔχει βάσιν, ἡ δὲ τὴν ἑτέραν, ἡ δὲ τρίτη τὴν μέσην τῶν βάσεων τούτων ἀνάλογον· καθότι ἀφαιρεθείσης τῆς ἰσοϋψοῦς τῷ τμήματι πυραμίδος $EAB\Gamma$ (σχ. 25) ἧστινος βάσις ἐστὶν ἡ κάτω τοῦ τμήματος βάσις $AB\Gamma$, ἡ τετραγωνικὴ μένει πυραμὶς $EA\Gamma Z\Delta$, ἥτις τῆς διαγωνίου $\Gamma\Delta$ ἀχθείσης εἰς δύο τριγωνικὰς διαιρεῖται πυραμίδας, ὧν ἡ μὲν $E\Gamma Z\Delta$ ἰσοϋψής ἐστι τῷ πυραμιδικῷ τμήματι βάσιν ἔχουσα τὴν ἑτέραν τούτου βάσιν ΔEZ· ἡ δὲ $EA\Gamma\Delta$ τῆς EH παραλλήλου τῇ ΔA ἀχθείσης, ἐπιζευχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ΔH καὶ ΓH, ἴση τῇ $HA\Gamma\Delta$ γίνεται, ἰσοϋψὴς αὐτῇ οὖσα, καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα βάσιν $A\Gamma\Delta$· ἀλλ' ἡ αὐτὴ $HA\Gamma\Delta$ ὡς ἔχουσα βάσιν τὴν $AH\Gamma$ θεωρηθεῖσα, ἰσοϋψής ἐστι τῷ πυραμιδικῷ τμήματι, ἔτι δὲ καὶ γωνία $E\Delta Z = HA\Gamma$, καὶ ἑπομένως $\Delta EZ : AH\Gamma :: \Delta E \cdot \Delta Z : AH \cdot A\Gamma :: \Delta Z : A\Gamma$, ἔχομεν δὲ καὶ $AH\Gamma : AB\Gamma :: A\Gamma \cdot AH : A\Gamma \cdot AB :: AH : AB :: \Delta E : AB$, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΔEZ, $AB\Gamma$, εὑρήσομεν $\Delta Z : A\Gamma :: \Delta E : AB$, ὥστε ἕξομεν καὶ $\Delta EZ : A\Gamma H :: A\Gamma H : AB\Gamma$, τ. ἐ. ἡ βάσις $A\Gamma H$ τῆς ἰσοϋψοῦς τῷ τμήματι πυραμίδος $\Delta A\Gamma H$ μέση ἀνάλογός ἐστι ταῖς δύο τοῦ τμήματος βάσεσι. Ἐὰν δὲ ἡ τμηθεῖσα πυραμὶς πολύγωνος δοθῇ, εἰς ἰσοϋψῆ τριγωνικὴν αὐτὴν μεταβάλλοντες, ἑπομένως δὲ καὶ τὸ πυραμιδικὸν αὐτῆς τμῆμα εἰς ἰσοϋψὲς τριγωνικῆς πυραμίδος μεταποιήσαντες, διὰ τὴν μεταβολὴν δηλ. τοῦ πολυγώνου τῶν τμήματος βάσεων εἰς τριγωνικὰς βάσεις, εὑρήσομεν διὰ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν, καὶ ἐν τούτοις τὸ ζητούμενον. Ὅθεν ὀνομασθείσης β τῆς θατέρας βάσεως, ὁποιουδήποτε πυραμιδικοῦ τμήματος παραλλήλους τὰς βάσεις ἔχοντος, B δὲ τῆς ἑτέρας, καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ τὸ στερεὸν τοῦ τμήματος ἔσται $\frac{(\beta+B+(\beta B)^{\frac{1}{2}})\upsilon}{3}$.

§370. Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἰς ὁμοίας καὶ ἰσαρίθμους τριγωνικὰς διαιροῦνται πυραμίδας. Ἐπειδὴ καὶ αἱ ὁμόλογοι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἕδραι εἰς ὅμοια διαιροῦνται τρίγωνα, ἐὰν τὰ τοιαῦτα τρίγωνα (τῶν μὴ τινὰ σχηματιζόντων στερεὰν γωνίαν ἐξαιρουμένων), ὡς βάσεις τριγωνικῶν ὑποληφθῶσι πυραμίδων, τὴν κορυφὴν τῆς στερεᾶς αὐτῆς γωνίας, καὶ τῶν τριγώνων ἐπιζητουμένη κορυφάς, οὐ μόνον εἰς ἰσαρίθμους, ἀλλὰ καὶ εἰς ὁμοίας ἑκάτερον πολύεδρον διαιρεθήσεται τριγωνικὰς πυραμίδας. Οἷον γάρ ἔστω (σχ. 26) τῶν Α, Ε, Β, Γ, α, ε, β, γ ἐπιζευχθεισῶν, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΕ ὁμοία τῇ αβγε ἔσται. Καθότι ἡ μὲν ΑΒΓ ἕδρα ὁμοία ἐστὶ τῇ αβγ, ἡ ΒΓΕ τῇ βγε, ἡ ΑΒΕ τῇ αβε, ὥστε καὶ ἡ ΑΓΕ τῇ αγε ὁμοία εἶναι (362), ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται καὶ ἡ ΑΓ[illegible] ὁμοία τῇ ὁμολόγῳ αὐτῇ αγδη, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.



σχ: 26

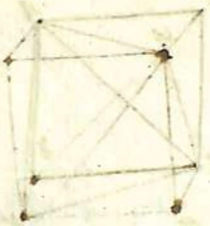


§371. Τὰ ὅμοια πολύεδρα πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐπειδὴ καὶ τὰ ὅμοια πολύεδρα εἰς ὁμοίας καὶ ἰσαρίθμους τριγωνικὰς διαιροῦνται πυραμίδας, ἔχει δὲ ἑκάστη τριγωνικὴ πυραμὶς πρὸς τὴν αὐτῇ ὁμόλογον ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (368), δῆλον ὅτι καὶ τὸ κ. φ. θατέρου πυραμίδων πρὸς τὸ κ. φ. τῶν ἑτέρου, ἤτοι θάτερον πολύεδρον πρὸς τὸ ἕτερον ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἔσεται πλευρῶν, ὅθεν ὑποθέντες α τὴν πλευρὰν πολυέδρου τινὸς Π, Α δὲ τὴν ὁμόλογον αὐτῇ κατὰ τὸ ὅμοιον πολύεδρον Π', ἕξομεν $Π : Π' :: α^3 : Α^3$.

§372. Περὶ σφαίρας θεωρήματα.

Σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου τμηθείσης, ἡ κοινὴ τομὴ κύκλος ἔσται. Καθότι (σχ: 27) ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας Κ ἐπὶ ΓΚ κάθετος ἀχθεῖσα τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τομῆς ΑΒΔΕ, πρὸς δὲ καὶ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΑΚ, ΒΚ, ΔΚ ἀχθεισῶν, ἐπειδὴ καὶ αὗται ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δῆλον ὅτι ἐπίσης ἀπὸ τῆς καθέτου ΓΚ ἀπέχουσιν, ὅθεν καὶ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν Αυ, Βυ, Δυ, [illegible] ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἀποδείκνυται ἡ κοινὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τομὴ κύκλος ἐστί.

§373. Ἡ τομὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη, αἱ ἡμιδιάμετροι ταύτης ταῖς ἡμιδιαμέτροις τῆς σφαίρας ταυτισθήσονται, τ. ἔ. πάντες οἱ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

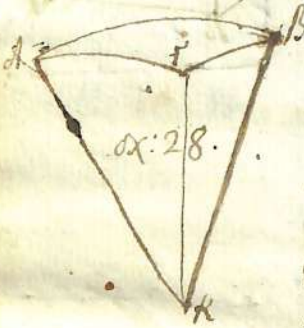


§374 Οἱ μέγιστοι τῆς σφαίρας κύκλοι ἐς δύο ἴσα μέρη ἀλλήλους διαιροῦνται· καθότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένη, διάμετρος καὶ τῆς σφαίρας καὶ τῶν κύκλων ἐστί.

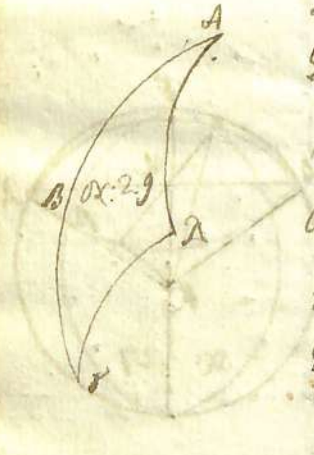
§375 Οἱ μέγιστοι κύκλοι τὴν σφαῖραν καὶ τὴν αὐτῆς ἐπιφάνειαν ἐς δύο ἴσα τέμνουσι ἡμισφαίρια· καθότι ταῦτα ἀλλήλοις ἐπιτεθέντα ἐφαρμόζουσιν· ἢ θάτερα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἀνίσως ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποχωροῦνται, ὅπερ ἀδύνατον.

§376 Οἱ κύκλοι τοσοῦτον ἐλάσσονές εἰσιν, ὅσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀφίστανται· ἐπειδὴ ὅσον ἡ ἀπόστασις ΚΘ μείζων ἐστί (σχ: 27), τοσοῦτον ἡ ΑΔ, ἤγουν τοῦ κύκλου ἡ διάμετρος ἐλαττοῦται.

§377 Διὰ δύο ἐπὶ τῆς σφαίρας δοθέντων σημείων δυνατὸν διαγράψαι τόξον μεγίστου κύκλου· καθότι τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ κέντρον τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζουσιν· εἰ δὲ καὶ τὰ δοθέντα σημεῖα διαμέτρου τινὸς ὑπάρχουσι πέρατα, τὸ κέντρον καὶ τὰ δοθέντα σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖνται εὐθείας· ὅθεν καὶ ἄπειροι δι' αὐτῶν κύκλοι διέρχονται.



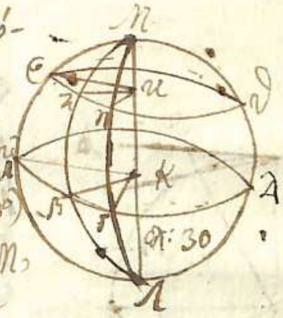
§378 Ἐν παντὶ τριγώνῳ μία τις πλευρὰ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κ:φ: τῶν λοιπῶν δύο· καθότι (σχ: 28), ἀχθεισῶν τῶν ἡμιδιαμέτρων ΑΚ, ΓΚ, ΒΚ, ἐπειδὴ καὶ μία τις ἐπίπεδος γωνία τῶν τὴν στερεὰν σχηματιζουσῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῶν λοιπῶν (339), δῆλον ὅτι καὶ τὸ μέτρον αὐτῆς, ἤγουν μία τις πλευρὰ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ τὰς λοιπὰς δύο γωνίας καταμετρουσῶν πλευρῶν.



§379: Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ ἐν γένει παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου τὸ κ:φ: τῶν πλευρῶν ἔλασσον ἐστὶ περιφερείας μεγίστου κύκλου· καθότι (σχ: 28) ἐπειδὴ καὶ τὸ κ:φ: τῶν τὴν στερεὰν γωνίαν Κ σχηματιζουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἔλασσόν ἐστι 4 ὀρθῶν (340), δῆλον ὅτι καὶ τὸ μέτρον αὐτῶν, ἤγουν τὸ κ:φ: τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ μέτρου 4 ὀρθῶν, ἤγουν τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

§380: Ἡ ἀπό τινος σημείου ἐς ἕτερον σημεῖον ἐγγυτάτη ἀπόστασις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας λαμβανομένη μεγίστου κύκλου τόξον ἐστί· καθότι (σχ: 29) ὑποτεθέντος τοῦ ΑΒΓ τόξου μεγίστου κύκλου, καὶ ληφθέντος τοῦ Δ ὡς σημείου, δι' οὗ ἡ τῶν Α, Γ διέρχεται ἐγγυτάτη ἀπόστασις, μὴ ὄντος τόξου μεγίστου κύκλου, ἀχθέντων δὲ τῶν ΑΔ, ΓΔ τόξου (377)· καὶ ληφθέντος τοῦ ΒΓ = ΓΔ, καὶ ἐπομένου· ἐπὶ τοῦ Δ ἀπὸ τοῦ Γ ἀποχώρησεως ἴσης ἐπὶ τοῦ Β ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Γ, ἔσεται ΑΒΓ < ΑΔ + ΓΔ, καὶ ΑΒ < ΑΔ · (378), ἀλλ' ἡ ἀποχώρησις τῶν Α, Δ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β ὑποτίθεται, ὥστε τὸ Δ πέραν μείζονος τόξου μεγίστου κύκλου πόλον ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅ, τι ἡ τὸ Β πέραν ἐλάσσονος τόξου μεγίστου κύκλου ἀπέχει, ὅπερ ἄτοπον.

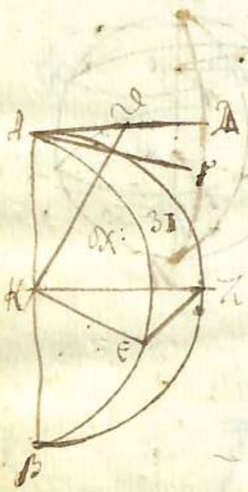
§381: Ἀχθείσης τῆς διαμέτρου καθέτου μεγίστῳ κύκλῳ, τὰ πέρατα αὐτῆς πόλοι ἔσονται τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῶν αὐτῷ παραλλήλων κτλ. (σχῆμα) ἐπεὶ ΛΜ καθέτου τῷ ΑΒΔ ὑποτεθείσης, αἱ γωνίαι ΑΚΜ, ΒΚΜ, ΓΚΜ, κτλ., ΑΚΛ, ΒΚΛ, κτλ. ὀρθαὶ ἔσονται, ἑπομένως δὲ καὶ τὰ αὐτῶν μέτρα ἤγουν τὰ τόξα ΑΕΜ, ΒΖΜ, κτλ. ΑΛ, ΒΛ, κτλ. τέταρτα περιφερειῶν μεγίστων κύκλων ἴσα δηλ: ἀλλήλοις, τουτ. τὰ σημεῖα Μ, Λ, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ ἀπέχοντα πόλοι αὐτοῦ εἰσιν, ἔστω δὲ καὶ ὁ κύκλος ΕΖΗΘ παράλληλος τῷ ΑΒΓΔ ὑποτεθείς, κάθετος ἔσται τῇ διαμέτρῳ ΛΜ, τουτ: ἔσονται καὶ αἱ γωνίαι ΕΚΜ, ΖΚΜ, ΗΚΜ, κτλ., ΕΚΛ, ΖΚΛ, κτλ. ὀρθαί εἰσιν, πρὸς δὲ καὶ αἱ ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις, δῆλον ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΜ, ΖΜ, ΗΜ, κτλ., ΕΛ, ΖΛ, ΗΛ, κτλ. καὶ ἑπομένως τὰ τόξα ΕΜ, ΖΜ, ΗΜ, ΕΛ, ΖΛ, ΗΛ, κτλ. ἴσα ἔσονται. τουτ: τὰ σημεῖα Μ, Λ, ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς περιφερείας ΕΖΗΘ ἀπέχοντα, πόλοι αὐτοῦ εἰσι:



§382: Τὸ τόξον τὸ ἀπὸ τοῦ πόλου Μ ἐπί τινος σημείου τοῦ αὐτοῦ μεγίστου κύκλου ἀγόμενον τόξον, ΑΜ, κάθετον ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου· καὶ ἐπεὶ ἔστω δὴ καὶ ἡ ΛΜ, κάθετος ἐπὶ τοῖς κύκλοις, ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κτλ. καὶ τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα ΜΑΛ, ΜΒΛ, ΜΓΛ, κάθετα αὐτοῖς ἔσονται, καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΒΜ, ΑΓΜ, κτλ. ΕΖΜ, ΕΗΜ, κτλ. ὀρθαί.

§383: Ἔστω δὴ δὲ καὶ ΑΜ τέταρτον κύκλου ἐπὶ, δοθέντος τοῦ τόξου ΑΒΓ μεγίστου κύκλου, ἐφαρμόζοντας τὸ τόξον ΑΜ, κάθετος τῷ ΑΒΓ, καὶ ποιοῦντες τὸ ΑΜ ἴσον τῷ τετάρτῳ τῆς περιφερείας, τὸν ζητούμενον εὑρίσκομεν πόλον Μ· ἐὰν δὲ δύο ὀρθὰ τόξα ΑΜ, ΒΜ τῷ δοθέντι ἐφαρμόσω, διὰ τῆς τομῆς αὐτῶν Μ τὸν πόλον τοῦ δοθέντος ΑΒΓ, ΕΖΗ, κτλ. εὑρίσκομεν τόξου.

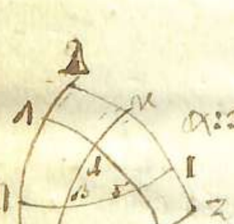
§384. Διὰ τοῦ πόλου ὡς κέντρου, καὶ ἴσου τόξου ὡς ἀποστήματος γραφέντες ἐπὶ τῆς σφαίρας διάφοροι γράφονται κύκλοι, ὅτι φερ' εἰπεῖν τὰ τόξα ΑΜ, ΕΜ, τὰ περὶ τὸν πόλον Μ περιφερόμενα τοὺς κύκλους ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, περιγράφουσι. ἐὰν δὲ ζητηθῇ, πρὸς τὸ τόξον ΕΖ ἀφαιρεθῇ, τοῦ πόλου αὐτοῦ Μ ἀφαιρεθέντος, ἕξομεν τὸ ζητούμενον.



§385: Τὸ εἰς τὸ πέρας τῆς ἡμιδιαμέτρου κάθετον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας ἐφάπτεται. καθότι (σχ. 31) ὑποτεθέντος τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΔ καθέτου τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΑΚ, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀγόμεναι αἱ ΚΘ φερ' εἰπεῖν, ἐπειδήπερ αἱ πρὸς τὴν ΑΚ πλάγιαι μείζονες αὐτῆς ἔσονται, καὶ ἑπομένως τὰ κοινὰ αὐτῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον σημεῖα ὡς τὸ Θ, φερ' εἰπεῖν, ἐκτὸς τῆς σφαίρας πίπτουσι· ὥστε τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν τῇ σφαίρᾳ ἔχει σημεῖον τὸ Α δηλ: τουτ: τῆς σφαίρας ἐφάπτεται.

§386: Δύο σφαῖραι, ὧν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ἴση ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἡμιδιαμέτρων, ἀλλήλων ἐφάπτονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν κύκλων ἐδείχθη.

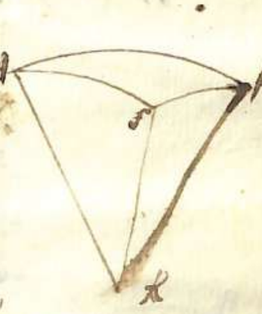
§387: Ἡ κλίσις δύο μεγίστων κύκλων ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν σχηματιζομένῃ γωνίᾳ, ἔχει δὲ μέτρον τὸ πόλῳ μὲν τῇ κοινῇ τῆς περιφερείας αὐτῶν τομῇ, διαστήματι δὲ τῷ τεταρτημορίῳ μεγίστης περιφερείας γραφόμενον τόξον. καθότι, ἐπειδὴ



καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ, ΑΔ κάθετοι εἰσὶ τῇ ΑΚ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΓΑΔ κλίσις ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων ΑΖΒ, ΑΕΒ, ἴση δηλ: τῇ ΕΚΖ γωνίᾳ. ἐπειδὴ δὲ αἱ ΑΕ, ΑΖ τέταρτα περιφερειῶν ὑπετέθησαν, ἔσονται αἱ γωνίαι ΑΚΕ, ΑΚΖ ὀρθαί, καὶ ἑπομένως ΕΚ, ΖΚ παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΑΔ, ἤγουν ἡ γωνία ΕΚΖ = ΓΑΔ, ἀλλὰ ἡ ΕΚΖ ὑπὸ τοῦ τόξου ΕΖ καταμετρεῖται, ὥστε καὶ ἡ ΓΑΔ, ἤγουν ἡ ΕΑΖ ὑπὸ τοῦ ΕΖ καταμετρηθήσεται.

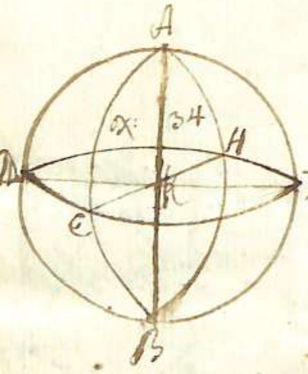
§388: Τεμνομένης σφαίρας κατὰ διάμετρον καὶ ἄλλου τινὸς γραφέντος, ὥστε τὰς γωνίας τοῦ πρώτου πόλους εἶναι τῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ δευτέρου πόλοι ἔσονται τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. καθότι (σχ. 32) ἐπειδὴ τὸ Α πόλος ἐστὶ τοῦ ΕΖ, δῆλον ὅτι ΑΕ τέταρτον τῆς περιφερείας ἐστί· ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ Γ πόλος ἐστὶ τοῦ ΕΖ, τὸ ΕΓ τέταρτον τῆς περιφερείας ἐστί, τὰ σημεῖα ὅτι Α, Γ ἴσον ἀπὸ τοῦ Ε ἀπέχουσιν ἄρα τὸ ΑΓ τόξον πόλον ἔχει τὸ Ε. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται τὸ Ζ πόλος τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Δ πόλος τοῦ ΒΓ.

§389: Ἑκάστη γωνία θατέρου τῶν τοιούτων τριγώνων, ἅπερ πολικὰ ὀνομάζονται, ἔχει μέτρον τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ἀντικειμένης τοῦ ἑτέρου τριγώνου πλευρᾶς· καθότι ἐκτεινομένων τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ μέχρι τῶν Η, Θ σημείων. ἐπειδὴ καὶ Α πόλος ἐστὶ τοῦ ΗΘ, τῆς γωνίας Α μέτρον ἔσται τὸ ΗΘ, (387) ἀλλὰ ΕΘ + ΗΖ ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ = ΕΖ + ΗΘ ἐστίν· ὥστε ΗΘ = ἡμιπεριφ: − ΕΖ ἔσται. ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται τὸ μέτρον τῆς Β = ἡμιπεριφ − ΔΖ, καὶ τὸ τῆς Γ = ἡμιπεριφ: − ΔΕ, ἐπειδὴ δὲ πάλιν ΜΓ + ΒΙ = ἡμιπεριφ = ΜΙ + ΒΓ ἐστίν, ἔσται ΜΙ, ἄρα τὸ μέτρον τῆς Δ = ἡμιπεριφ: − ΒΓ, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ~~μέτρον~~ τὸ μέτρον τῆς Ε = ἡμιπεριφ: − ΑΓ, καὶ τὸ τῆς Ζ = ἡμιπεριφ: − ΑΒ.



§390 Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ (σχ: 33) ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ὄντα, καὶ ἀλλήλοις ἰσογώνια ἔσονται. Καθότι, ἐπειδὴ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι ὑπὸ τριῶν ἀλλήλαις ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν σχηματίζονται, δῆλον, ὅτι καὶ αἱ κλίσεις αὐτῶν ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Β = β, ἡ Γ = γ, καὶ ἡ Α = α, τὰ δὲ λοιπὰ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων θεωρήματα, ὡς καὶ τὰ τῶν ἐπιπέδων ἀποδεικνύονται. ὅταν δὲ τὰ ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἢ ἐπὶ ἴσων ληφθῶσι σφαιρῶν, τότε καὶ ἰσόπλευρα ἔσονται. Καθότι, ὑποθέντες Λ, Μ τὰ ἰσογώνια τρίγωνα, Π, Ρ τὰ αὐτῶν πολικά, ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι τῶν Λ, Μ ἴσαι ἀλλήλαις ὑπόκεινται, ἕξομεν καὶ τὰς πλευρὰς τῶν Π, Ρ . . . καὶ ἑπομένως τὰς γωνίας ἴσας, ἀλλ' ἑκάστη τούτων μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, ἀφαιρεθείσης τῆς ἀντικειμένων τῶν Λ, Μ πλευρᾶς, ὥστε καὶ αἱ πλευραὶ τῶν Λ, Μ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

σχ: 33



§391: Τὸ κ:φ: τῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἔλασσον μέν ἐστιν ἓξ ὀρθῶν, μεῖζον δὲ δύο. Καθότι, ἐπειδὴ καὶ ἑκάστη γωνία παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἐλάσσων ἐστὶ δύο ὀρθῶν, δῆλον ὅτι τὸ κ: φ: αὐτῶν ἔλαττον εἶναι ἓξ ὀρθῶν· ἐπειδὴ δὲ καὶ ἑκάστη γωνία μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, ἀφαιρεθείσης τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς τοῦ πολικοῦ, δῆλον ὅτι καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι μέτρον ἕξουσι τρεῖς ἡμιπεριφερείας τῶν τριῶν ἀφαιρεθεισῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ κ: φ: τούτων ἔλασσόν ἐστι περιφ: (§ 371). ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τῶν τοῦ τριγώνου γωνιῶν μεῖζον εἶναι ἡμιπεριφερείας, τουτέστι τὸ κ: φ: τῶν τριῶν γωνιῶν μεῖζον δύο ὀρθῶν.

§392: Ἐκ τούτου ~~ἄρα~~ γίνεται, ὅτι ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων δύο δοθεισῶν γωνιῶν, ἡ τρίτη ἄγνωστος ἔσεται· καὶ ὅτι δυνατὸν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ὀρθάς, ἢ ἀμβλείας εἶναι.

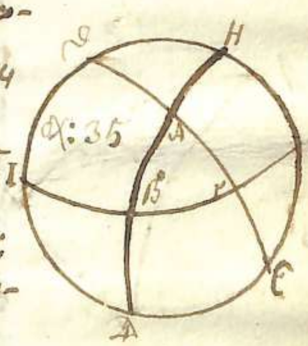
§393: Ὁ σφαιρικὸς ἄτρακτος ΑΔΒΕΑ (σχ:34) ἔχει πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ γωνία ΔΑΕ πρὸς 4 ὀρθάς, ἤγουν ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν ΔΕΖΗ. Καθότι ὁ ἄτρακτος τῷ τόξῳ ΔΕ, ἤγουν τῇ γωνίᾳ ΔΑΕ συμμεταβάλλεται, καὶ ἐὰν ἡ γωνία 4 πληρώσῃ ὀρθὰς αὐξανομένη, ἤγουν τὸ τόξον ΔΕ τὴν περιφέρειαν, καὶ ὁ ἄτρακτος ὅλην συμπληρώσει τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ὅθεν δῆλον γίνεται, ὅτι καὶ δύο ἄτρακτοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν, ἢ ἴσων σφαιρῶν λαμβανόμενοι, πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, ὡς αἱ αὐτῶν γωνίαι, καὶ ὁποιοσδηποτοῦν σφαιρικὸς σφὴν πρὸς ὅλην ἔχει τὴν σφαῖραν, ὡς ἡ αὐτοῦ γωνία πρὸς 4 ὀρθάς, καὶ δύο σφῆνες ἐπὶ τῶν αὐτῶν, ἢ ἴσων σφαιρῶν θεωρούμενοι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν γωνίαι.

§394: Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΔΑΖ, ΕΑΗ (σχ:34) ἀλλήλους τέμνωσι, τὸ κ:φ: τῶν τριγώνων ΔΑΕ, ΖΑΗ ἴσον ἔσται ἀτράκτῳ, οὗτινος ἡ γωνία ἐστὶ ΖΑΗ· καθότι τῶν τόξων ΑΖ, ΑΗ, μέχρι τῆς τομῆς αὐτῶν Β ἐκτανθέντων, ἐπειδὴ καὶ ΔΑΖ, ΑΖΒ ἡμιπεριφέρειαί εἰσι, τοῦ ΑΖ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος, ἔσται ΑΔ = ΒΖ. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἀποδειχθήσεται.

ΔΕ = ΒΗ, καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΛΔΕ = ΒΗΖ (390), καὶ
ΛΔΕ + ΖΔΗ = ΔΖΒΗΔ.

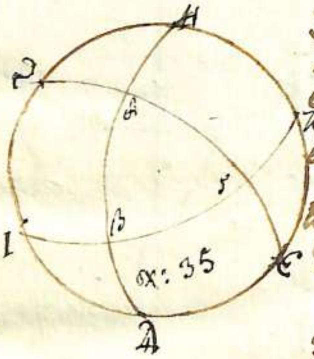
396. ὡσαύτως δῆλον γίνεται ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ σορ-
μίδες, ΚΕΑΛ, ΚΖΑΗ, βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΗ
ἔχουσαι, τῷ σφηνὶ ἰσομετρηθήσονται, οὗ τινος γωνία ἡ ΖΑΗ
ἐστί.

§396. Ἐπὶ τῆς σφαίρας τρεῖς διάφοροι παραλαμβάνονται μονάδες ἡ
τῶν γωνιῶν, καὶ ἐστὶν ἡ ὀρθή, ἡ τῶν ἐπιφανειῶν, ἀρ' ἐστι
τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ὁσάκις αὐτὰ σφαιρικὴ ἐπιφα-
νεία περιεχόμενον, ἡ ἡ τῶν ζητῶ, καὶ ἐστιν ἡ σφαι-
ρικὴ τρίγωνος σορμίς, ἡ βάσιν μὲν τὸ τρισορθο-
γώνιον ἔχουσα τρίγωνον, ὁσάκις δὲ ἐν τῇ σφαίρᾳ
περιεχομένη. ὥστε ὁσάκις ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τὰς 4
περιέχεται ὀρθάς, τοσάκις τὸ μὲν τρισορθογωνίου τρι-
γώνου εἰς τὴν σφαιρικὴν ἡμισφαίριον, ἡ δὲ τρισορθο-
γώνιος σφαιρικὴ σορμὶς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς σφαίρας
περιέχεται, ὁσάκις δὲ εἰς τὰς ὀκτώ, τοσάκις τὸ μὲν
τρισορθογωνίου τρίγωνον εἰς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἡ
δὲ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ σορμὶς εἰς ὅλην τὴν σφαῖραν.
ὅθεν καὶ ἡ μὲν σφαιρικὴ ἡμισφαίρια, ὡς πρὸς τὸ τρι-
σορθογώνιον τρίγωνον ὑπὸ 4 ἀναφερομένη, τὸ ὅλον δὲ ὑπὸ ὀκτὼ
μετρηθήσεται ὀρθῶν, καὶ τὸ μὲν ἥμισυ τῆς σφαίρας ὡς
πρὸς τὴν τρισορθογώνιον σφαιρικὴν σορμίδα ἀναφερόμενον
ὑπὸ 4, τὸ δὲ ὅλον, ὑπὸ 8 παραστήσεται ὀρθῶν.



§397. Ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ: 35)
ὡς πρὸς τὸ τρισορθογώνιον ἀναφερόμενον, μέτρον ἔχει τὸ
κ. φ. τῶν αὐτοῦ γωνιῶν, δύο ἀφαιρεθεισῶν ὀρθῶν· καὶ δὴ
ἐκβληθεισῶν τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν μέχρι τῆς
μετὰ τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΕΖΘ συναντήσε

αὐτῶν, τὰ μὲν τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΘΗ ἴσα ἔσονται ἀ-
τράκτῳ, ὅτινος μέτρον ἐπὶ τὸ 2Α, τ.ἔ. ἕξομεν
ΑΔΕ + ΑΘΗ = 2Α, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ΒΖΗ + ΒΔΙ =
2Β, καὶ ΓΕΖ + ΓΘΙ = 2Γ, ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ κ.φ. τοῦ
ἐξ ὅλων τριγώνων κατὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ τὴν σφαιρικὴν
ὑπερβαίνει ἡμισφαίριον, αὕτη δὲ διὰ 4 ~~παριστᾶται~~ ὑποτίθεται ὀρθῶν
ἔσεται $2ΑΒΓ = 2Α + 2Β + 2Γ - 4$, ἤτοι $ΑΒΓ = Α + Β + Γ - 2$
ὥστε ὁποίαν ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει περιοχῆς ἀναφοράν, ὡς
πρὸς ταύτην τὴν διαφοράν, τοιαύτην καὶ τὸ τρισορθογώνιον
τρίγωνον ἔχει πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓ.



§398: Ἐκ τούτων δῆλον γίνεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσόμετρον
ἐστὶν ἀτράκτῳ γωνίαν ἔχοντι τὴν $\frac{A+B+Γ}{2}-1$, καὶ ὅτι ἡ
σφαιρικὴ πυραμὶς ἡ βάσιν ἔχουσα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσόμετρος
ἐστὶ σφηνί, ὅτινος γωνία ἐστὶν ἡ $\frac{A+B+Γ}{2}-1$, καὶ ὅτι τοιαύ-
την ὡς πρὸς τὴν τρισορθογώνιον σφαιρικὴν πυραμίδα ἔχει
ἀναφοράν, τοίαν καὶ ἡ βάσις αὐτῆς ΑΒΓ πρὸς τὸ τρισορθογώνιον
τρίγωνον, ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ
πυραμίδες, καὶ ἐπομένως δύο ὁποιαιδήποτε σφαιρικαὶ
τριγωνικαὶ πυραμίδες ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας περιβαλλόμεναι
πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις.

§399. Ὁποῖον δήποτε σφαιρικὸν πολύγωνον μέτρον
ἔχει τὸ κ.φ. τῶν αὐτοῦ γωνιῶν, τοσάκις δύο ἀφαι-
ρεθησῶν ὀρθῶν, ὅσας ἔχει πλευρὰς πλὴν δύο· πα-
[illegible], ἐπειδὴ καὶ ὁποιονδήποτε πολύγωνον διὰ τῶν δια-
γωνίων, τέμνον ΑΔ, ΑΓ, ΑΒ (σχ: 36) εἰς τοσαῦτα διαιρεῖται
τρίγωνα, ὅσας ἔχει πλευρὰς πλὴν δύο, καὶ ἐπειδὴ παντὸς
τριγώνου μέτρον ἐστὶ τὸ κ.φ. τῶν αὐτοῦ γωνιῶν, δύο ἀ-
φαιρεθησῶν ὀρθῶν, ἕπεται, ὅτι καὶ παντὸς σφαιρικοῦ
πολυγώνου μέτρον ἔσεται τὸ κ.φ. τῶν αὐτοῦ γωνιῶν,
τοσάκις δύο ἀφαιρεθησῶν ὀρθῶν, ὅσας ἔχει πλευρὰς
πλὴν δύο, ὅθεν ὀνομασθέντος τε τὸ κ.φ. τῶν γωνιῶν

σφαιρικοῦ τινὸς πολυγώνου, οὗ τῶν πλευρῶν ἔστω τὸ σ,
τὸ μέτρον ἐν γένει ἔσται $\kappa - 2(\sigma - 2) = \kappa - 2\sigma + 4$.

§ 400: ὑποτεθέντος Σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στερεῶν γωνιῶν πολυ-
έδρου τινὸς, E τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, καὶ Π τοῦ ἀριθμοῦ
τῶν πλευρῶν, γενήσεται $\Sigma + E = \Pi + 2$· καθότι ἀπό τινος ση-
μείου ἐντὸς τοῦ πολυέδρου ληφθέντος, ἐς πάσας τὰς στερεὰς
γωνίας αὐτοῦ εὐθειῶν ἀχθεισῶν, σφαίρας δὲ διὰ κέν-
τρου τοῦ ῥηθέντος σημείου γραφείσης, καὶ ταῖς ἀπ' αὐτοῦ ἀχ-
θείσαις εὐθείαις συναντησάσης, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν
συναντήσεων τόξων μεγίστων κύκλων ἀχθέντων, γε-
νοῦνται ἐπὶ τῆς σφαίρας σχηματισθησόμενα σφαιρικὰ πο-
λύγωνα, ὅσαι εἰσὶν αἱ τοῦ πολυέδρου ἕδραι. ὑποτε-
θέντος δὲ τοῦ ΑΒΓΔΕ ἑνὸς τῶν τοιούτων πο-
λυγώνων, τὸ μέτρον αὐτοῦ ἔσται $\kappa - 2\sigma + 4$, ἑτέρου
δέ τινος, κ' κεφ: τῶν γωνιῶν ἔχοντος, σ' δὲ πλευρὰς
ἔσται $\kappa' - 2\sigma' + 4$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἡ δὲ τῆς σφαίρας
ἐπιφάνεια 8 μέτρον ἔχουσα, καὶ ἴση τῷ κ:φ τῶν τοιού-
των πολυγώνων οὖσα, μέτρον ἕξει καὶ τὸ κ:φ πασῶν
τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων, δὶς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευ-
ρῶν αὐτῶν ἀφαιρεθέντος, καὶ τοῦ 4 τοσάκις προστε-
θέντος, ὅσαι εἰσὶν αἱ τοῦ πολυέδρου ἕδραι, ἐπειδὴ
δὲ καὶ τὸ κ:φ πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων τοσά-
κις τέτρασιν ὀρθαῖς ἐξισοῦνται, ὅσαι εἰσὶν τοῦ πολυέ-
δρου αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὸ δὲ διπλάσιον τῶν πλευ-
τῶν πλευρῶν τοῦ πολυέδρου ρῶν τῶν πολυγώνων, ἴσον ἐστὶ τῷ τετραπλασίῳ +
καὶ τὰς αὐτὰς πλευρὰς δὶς ~~[illegible]~~ λαμβανομένης, τὸ
μέτρον τῆς ἐπιφανείας πάντων τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων,
ἤτοι τῆς σφαίρας, ἔσται $4\Sigma - 4\Pi + 4E$. καὶ ἑπομένως
ἔσομεν $8 = 4\Sigma - 4\Pi + 4E$. ὅθεν λαμβάνομεν
$\Sigma + E = \Pi + 2$.

401: Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ κ:φ: πασῶν τῶν ἐπιπέδων γω-
νιῶν ὁποιουδήποτε πολυέδρου ἴσον ἐστὶ τεσσάρων ὀρθαῖς τοσά-
κις ληφθείσαις, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ $\Sigma-2$ περιέχεται τοῦ
Σ τὸν ἀριθμὸν τῶν στερεῶν ἀποσημαίνοντος γωνιῶν. καθότι,
ἐπειδὴ ἐστὶ τὸ κ:φ: τῶν γωνιῶν ἁποιασδήποτε ἕδρας ἴσον ἐστὶ
δυσὶν ὀρθαῖς, τοσάκις ληφθείσαις, ὁσάκις ἡ 1 ἐν τῷ $\pi-2$
περιέχεται, τοῦ τὸν ἀριθμὸν π τῶν τῆς ἕδρας δηλοῦντος πλευρῶν, καὶ ἐ-
πειδὴ ὁ ἀριθμὸς πασῶν τῶν πλευρῶν τῶν ἑδρῶν ἴσος ἐστὶ τῷ
2Π τοῦ Π τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυέδρου χα-
ρακτηρίζοντος, τὸ δὲ 2 τοσάκις ληφθέν, ὅσαι εἰσὶν αἱ ἕδραι
ἴσον ἐστὶ τῷ $2E$, δῆλον, ὅτι τὸ κ:φ: πασῶν τῶν ἐπιπέδων
τοῦ πολυέδρου γωνιῶν, τοσάκις δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἔσεται,
ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ $2\Pi-2E$ περιέχεται. ἀλλὰ $2\Pi-2E=$
$2\Sigma-4=2(\Sigma-2)$ (400), ἄρα τὸ ζητούμενον κ:φ: τοσάκις τέ-
σσαρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐστι, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ $\Sigma-2$ περιέχει.

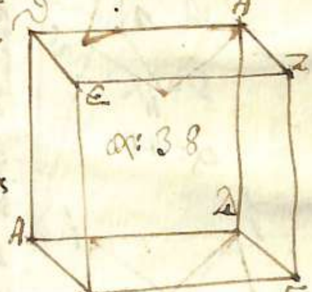
Περὶ κανονικῶν Πολυέδρων.

$\frac{2\cdot3}{3}$ ἢ $\frac{2\cdot4}{3}$, ἢ $\frac{2\cdot5}{3}$ 402: Πέντε μόνα εἰσὶ τὰ κανονικὰ πολύεδρα, καθότι, ὅταν
μὲν αἱ ἕδραι τρίγωνα ὦσι κανονικά, τότε αἱ στερεαὶ γωνίαι,
ἢ ἀπὸ τριῶν ἐπιπέδων, ἢ ἀπὸ 4, ἢ ἀπὸ 5 σχηματίζονται καὶ
τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, καὶ εἰκοσάεδρον συμπληροῦσιν.
ἀδύνατον δὲ ἀπὸ ἓξ σχηματισθῆναι, ὡς τέσσαρσιν ὀρθαῖς
ἐξισουμένων, ὅταν δὲ αἱ ἕδραι τετράγωνα ὑπάρχωσι, τότε
αἱ στερεαὶ ἀπὸ 3 μόνον ἐπιπέδων σχηματιζόμεναι, τὸν κύ-
βον συναπαρτίζουσιν, ὅταν δὲ αἱ ἕδραι πεντάγωνα κανο-
νικά, τότε αἱ στερεαὶ ἀπὸ τριῶν ἐπιπέδων συντιθέμεναι,
$\frac{4\cdot3}{4}$ τὸ δωδεκάεδρον ἀποτελοῦσιν, ἀδυνατοῦν δὲ τὰς στερεὰς
γωνίας ἀπὸ 4 τοιούτων συντιθέναι ἐπιπέδων γωνιῶν, ὡς
$\frac{6\cdot3}{5}$ 4 ὀρθὰς ὑπερβαινουσῶν, ἀδύνατον δὲ ἐστὶν ἔσεσθαι τὰς ἕδρας τῶν
κανονικῶν πολυέδρων, ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα κτλ εἶναι.
καθότι τότε αἱ γωνίαι, δι' ὧν ἡ στερεὰ σχηματισθήσεται,
ἢ ἴσαι, ἢ μείζονες 4 ἔσονται ὀρθῶν.

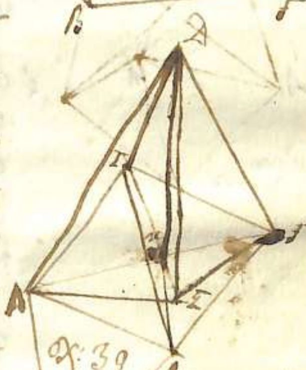
Προβλήματα.

§403: Ἕδρας τοῦ ἐλλείποντος κανονικοῦ πολυέδρου δοθείσης, τὸ πολύεδρον ἀναγράψαι. Δοθείσης, φέρ' εἰπεῖν, τῆς ἕδρας ΑΒΓ (σχ. 37) κανονικοῦ τετραέδρου, εὑρεθέντος τοῦ κέντρου Κ, καὶ ὑψωθείσης τῆς καθέτου ΚΣ, ληφθείσης δὲ τῆς ΑΣ = ΑΒ, ἀχθεισῶν καὶ τῶν ΣΒ, ΣΓ, τὸ ΣΑΒΓ τὸ ζητούμενον ἐστι τετράεδρον· καθότι, ἐπειδὴ καὶ ΑΚ = ΒΚ = ΓΚ, ἴσαι εἰσίν, ὅθεν καὶ αἱ πλευραὶ ΑΣ = ΒΣ = ΓΣ, καὶ ἑπομένως αἱ ἕδραι ΑΣΒ = ΑΒΓ = ΒΣΓ = ΑΣΓ εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ στερεαὶ Σ = Α = Β = Γ ὡς ἐξ ἴσων συγκειμένων γωνιῶν, ὥστε τὸ ΣΑΒΓ κανονικόν ἐστι τετράεδρον.

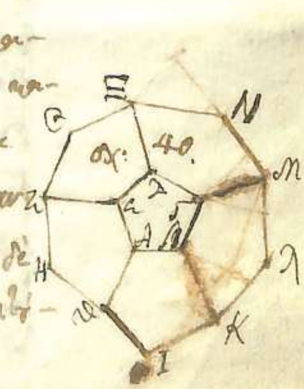
§404: Δοθέντος δὲ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ:38), ἐὰν ἐπ' αὐτοῦ ὀρθὸν πρίσμα κατασκευασθῇ, ὕψος ἔχον τὸ ΒΕ = ΑΒ, ὁ ζητούμενος κύβος εὑρεθήσεται.

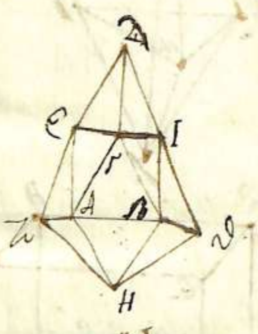


§405: Δοθέντος δὲ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (σχ:39) ΑΜΒ, ἐάν, κατασκευασθέντος τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Κ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΤΣ, ληφθῇ ΚΤ = ΑΚ = ΚΣ, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ΑΣ, ΓΣ, ΑΤ, ΓΤ &c., τὸ ΑΒΓΔΣΤ κανονικὸν ἔσεται ὀκτάεδρον· καθότι, ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ΑΚΣ, ΑΚΔ, τῆς ΑΚ = ΚΣ = ΚΔ οὔσης, καὶ ΑΔ = ΑΣ ἐστίν· ὡσαύτως ἀποδειχθήσονται, καὶ πᾶσαι τοῦ ὀκταέδρου σχήματος αἱ πλευραὶ ἴσαι, ἴσαι δὲ καὶ αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ ἴσαι ὡς ἐκ δύο ἴσων συγκείμεναι τριγωνικῶν στερεῶν, ὥστε τὸ ΑΒΓΔ κανονικὸν ἔσεται ὀκτάεδρον.

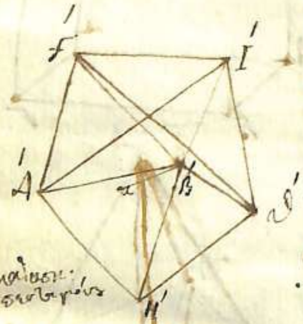


§406: Δοθέντος δὲ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ:40), ἐὰν κατασκευασθῶσι στερεαὶ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, Ε, ἐκ τριῶν ἴσων κανονικῶν πενταγώνων γωνιῶν, ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τὰ κανονικὰ πεντάγωνα ΒΓΜΛΚ, ΑΒΚΙΘ, &c ἐπιφάνειαν ἕξομεν ἀπὸ ἓξ συγκειμένων κανονικῶν πενταγώνων, ἐὰν δὲ καὶ ἑτέρα ὡσαύτως κατασκευασθεῖσα ταύτῃ συναφθῇ, τὸ ζητούμενον εὑρεθήσεται κανονικὸν δωδεκάεδρον.





σχ: 41

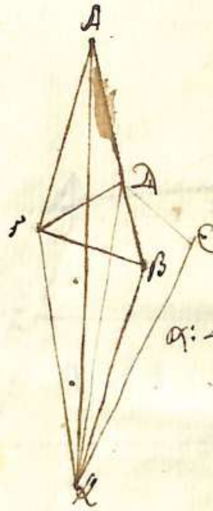


§401: Δοθέντος δὲ τοῦ κανονικοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ: 41), ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΓ, ἡ ΑΓ πεντάγωνον κατασκευασθῇ κανονικὸν τὸ ΑΗΘΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Κ τῇ καθέτῳ ΚΒ ἀχθῶσι, ληφθείσης δὲ καὶ τῆς ΑΒ = ΑΓ, ἀχθῶσιν αἱ ΒΗ, ΒΘ, ΒΙ, ΒΓ, ἡ γωνία Β ὅλη Β, ἐκ πέντε ἔσται συγκειμένη γωνιῶν, ὧν ἑκάστη ἴση μιᾷ τινὶ τῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐστίν, ὅτι δὲ καὶ αἱ ἴσαι ἕδραι ὡς ΑΒΓ, ΒΓΙ ἴσον πρὸς ἀλλήλας κλίνουσι δῆλον γίνεται· καθότι ἄρα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι Α, Η, Θ ... ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς ἐκ τριῶν ἴσων γωνιῶν συγκείμεναι, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ κλίσεις δύο τινῶν προσκειμένων ἑδρῶν ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἐὰν δὲ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι Α, Γ ὡσαύτως κατασκευασθῶσιν, ἐπιφαίνεται ἄλλο τι ἀπὸ δέκα συγκείμενον κανονικῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν τὸ ΑΒΓΔΕΘ, ἐὰν δὲ καὶ τοιαύτας ἑτέρας κατασκευάσαντες αὐτῇ συνάψωμεν, τὸ ζητούμενον εὑρήσομεν κανονικὸν εἰκοσάεδρον.

§402. Τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν παντὸς κανονικοῦ στερεοῦ πολυέδρου, τὸ πρόσχημα τοῦτο ἀφιλεῖ διὰ τὸ (343) ἐπιφαίνεται. καθότι τοῦ τετραέδρου τῶν τριῶν γωνιῶν, δι' ὧν ἡ στερεὰ σχηματίζεται γνωστῶν οὐσῶν, καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ~~γνω~~ γνωσθήσεται· τοῦ δὲ ἑξαέδρου ἴση ὀρθῇ γωνίᾳ εὑρεθήσεται, τοῦ δὲ ὀκταέδρου γνωστοῦ οὔσης τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ τῆς ὀρθῆς, δι' ὧν τὸ ἥμισυ τῆς στερεᾶς σχηματίζεται, καὶ ἡ κλίσις δύο τινῶν ἐπιπέδων γνωστὴ γενήσεται, τοῦ δὲ δωδεκαέδρου γνωστῶν οὐσῶν τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ ἡ κλίσις αὐτῶν ὁρίζεται, τοῦ δὲ εἰκοσαέδρου ἡ κλίσις δύο τινῶν ἐπιπέδων εὑρίσκεται σχηματισθείσης στερεᾶς διὰ δύο ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνιῶν, καὶ τρίτης κανονικοῦ πενταγώνου, καθότι τότε τῶν τριῶν τῆς στερεᾶς γωνιῶν γνωστῶν οὐσῶν, καὶ ἡ κλίσις δύο τινῶν ἐπιπέδων γνωσθήσεται.

§403: Τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυέδρου δοθείσης, τὰς ἡμιδιαμέτρους εὑρεῖν τῆς ἐν αὐτῷ ἐγγραφομένης, καὶ περιγραφομένης σφαίρας. Ὑποτεθείσης ΑΒ τῆς πλευρᾶς δύο προσκειμένων ἑδρῶν (σχ: 42), Γ, Ε τῶν κέντρων αὐτῶν, ΓΔ, ΔΕ τῶν ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ καταγομένων καθέτων, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ΓΚ, ΚΕ ταῖς ΓΔ, ΔΕ καθέτων, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Κ κέντρον ἔσται τῆς ἐν τῷ κανονικῷ πολυέδρῳ ἐγγραφομένης, καὶ περὶ αὐτὸ περιγραφομένης σφαίρας, καὶ τῆς μὲν πρώτης ἡμιδιάμετρος ἔσται ἡ

ΓΚ, ἡ ΕΚ· ἔτι δὲ ἀμφότεραι ἡ ΑΚ, ἡ ΒΚ· καθότι ἐπει-
δὴ καὶ ΓΔ = ΔΕ, ἡ ΔΚ κοινή, ἔσται, καὶ ΓΚ = ΕΚ. Ὅθεν
ἡ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΚ γραφομένη σφαῖ-
ρα, διὰ τῶν Γ, Ε διελεύσεται, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ὅτι ἡ
τοιαύτη σφαῖρα καὶ διὰ τῶν κέντρων τῶν λοιπῶν διελεύσεται
ἑδρῶν, ἤτοι πασῶν τῶν ἑδρῶν ἐφάψεται. Ὡσαύτως ἐπει-
δὴ καὶ ΑΔ = ΒΔ, καὶ ΔΚ κοινή, καὶ ΑΒ κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΓΚΕΔ, ἤτοι ἡ γω-
νία ΒΔΚ = ΑΔΚ ἔσται καὶ ΑΚ = ΒΚ. Καὶ ἐπομένως ἡ κέντρῳ μὲν τῷ
Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΑΚ γραφομένη σφαῖρα διὰ τῶν Α, Β διελεύσεται·
ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ὅτι ἡ τοιαύτη σφαῖρα διὰ τῶν περάτων πα-
σῶν τῶν πλευρῶν διελεύσεται, ἤτοι περὶ τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένη
ἔσται, ὅ.ἔ.δ. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς ΑΒ κανονικοῦ πολυέδρου, εὑρεθείσης δὲ
καὶ τῆς κλίσεως δύο τινῶν ἑδρῶν ἤτοι τῆς γωνίας ΓΔΕ, καὶ τῶν κέν-
τρων αὐτῶν Γ, Ε, ἀχθεισῶν δὲ καὶ τῶν καθέτων ΓΚ, ΕΚ, πρὸς δὲ καὶ
τῆς ΒΚ, εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον τῶν σφαιρῶν κέντρον, καὶ αἱ αὐτῶν
ἡμιδιάμετροι.



α: 42

§410: Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ὁποιονδήποτε κανονικὸν πολύεδρον εἰς τοσαύ-
τας διαιρεθήσεται πυραμίδας, ὅσαι εἰσὶν αἱ αὐτοῦ ἕδραι, τῶν δὲ πυ-
ραμίδων κοινὴ ἔσται κορυφὴ τὸ τοῦ πολυέδρου κέντρον. Ὅθεν δῆλον
γίνεται ὅτι τὸ στερεὸν παντὸς κανονικοῦ πολυέδρου ἴσον ἐστὶ τῇ αὐτοῦ
ἐπιφανείᾳ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐγγραφομένης σφαίρας πολ-
λαπλασιασθείσῃ.

§411: Ἐπεὶ δὲ καὶ δύο κανονικὰ τετράεδρα, ὀκτάεδρα, κτλ. ὅμοιά εἰσι στε-
ρεά, καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν διαστάσεις ἀνάλογοι, ἔπεται ὅτι αἱ ἡμι-
διάμετροι τῶν ἐν αὐτοῖς ἐγγραφομένων, ἢ περιγραφομένων σφαιρῶν
πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ πλευραὶ τῶν τοιούτων πολυέδρων.

§412: Σφαίρας περὶ κανονικὸν περιγραφείσης πολύεδρον, ἡ μὲν ἐπι-
φάνεια διὰ τῶν διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀγομένων ἐπι-
πέδων εἰς τοσαῦτα διαιρεθήσεται σφαιρικὰ πολύγωνα, τὸ δὲ στερεὸν
εἰς τοσαύτας σφαιρικὰς πυραμίδας, ὅσαι εἰσὶ τοῦ πολυέδρου αἱ ἕδραι.

Περὶ Στρογγύλων Στερεῶν.

§413: Παντὸς κυλίνδρου τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ
τὸ ὕψος αὐτοῦ γινομένῳ· καθότι τῆς βάσεως καθ' ὅλον κινηθείσης
τὸ ὕψος ὁ κύλινδρος πληρωθήσεται. Ὥστε ὀνομασθείσης σ τῆς
ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, τὸ
στερεὸν ἔσται $\pi\bar{\sigma}\upsilon$ (298), ἄλλως δέ πως εὑρεθήσεται $\pi\bar{\Sigma}\upsilon$

ὅθεν ἄξομεν, κ : κ :: $\pi\delta^2\upsilon : \pi\Sigma^2\upsilon$, ὅπερ δῆλον γίνεται ὅτι οἱ ἴσας τὰς βάσεις ἔχοντες κύλινδροι παράλληλοι εἰσὶ ὡς τὰ ὕψη, ὡς δὲ ἰσοϋψεῖς ὡς αἱ βάσεις, οἱ δὲ ὅμοιοι κύλινδροι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψεων ἢ τῶν διαμέτρων, ἢ ἡμιδιαμέτρων τῶν βάσεων. καθότι, ἐπειδὴ οἱ ὅμοιοι κύλινδροι ἔχουσι τὰ ὕψη ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων ἀνάλογα, ἀντὶ τῶν διαμέτρων τῶν ὕψεων ἀντικαθισταμένων, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἄξομεν $\kappa : \kappa : \delta^3 : \Sigma^3$ ἢ $\kappa : \kappa :: \upsilon^3 : \upsilon^3$.

§414. Ἡ κυρτὴ παντὸς κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιασθείσῃ. καθότι τῆς περιφερείας ... ὅταν τὸ ὕψος ληφθῇ, ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια ἀπαρτισθήσεται.

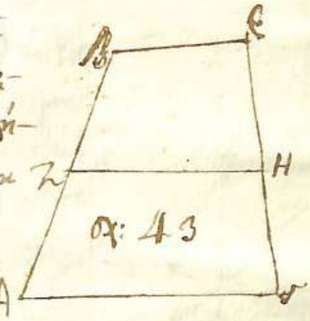
§415. Παντὸς κώνου τὸ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. καθότι τὴν βάσιν αὐτοῦ ὡς πολύγωνον μεταλαμβάνοντες (301)(302) πυραμίδα προσάγομεν τῷ κώνῳ ἰσοδύναμον, ἀλλὰ τῆς πυραμίδος τὸ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὥστε καὶ τοῦ κώνου τὸ χωρίον τὸ τρίτον ἔσεται τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. ὅθεν ὀνομασθείσης δ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, τὸ χωρίον ἔσεται $\frac{1}{3}\cdot\pi\delta^2\upsilon$, τὸ τρίτον δηλ. τοῦ ἰσοϋψοῦς καὶ ἴσην ἔχοντος βάσιν κυλίνδρου, ἐξ οὗ δῆλον γίνεται, ὅτι αἱ τῶν κυλίνδρων ἀναλογίαι καὶ ἐπὶ τῶν κώνων θεωρηθήσονται.

§416. Ὀνομασθείσης Σ τῆς ἡμιδιαμέτρου θατέρας βάσεως ἀποτετμημένου κώνου καὶ τὰς βάσεις παραλλήλους ἔχοντος, δ δὲ τῆς ἑτέρας καὶ υ τοῦ ὕψους αὐτοῦ τὸ χωρίον ἔσεται $\frac{\pi\upsilon}{3}(\Sigma^2+\Sigma\delta+\delta^2)$ καθότι, ἐπειδὴ καὶ ὁποιουδήποτε πυραμικοῦ τμήματος παραλλήλους τὰς βάσεις τμηθέντος, τὸ στερεὸν ἐστὶ $\frac{\upsilon}{3}(\beta+\beta'+\sqrt{\beta\beta'})$ (369) πυραμικοῦ, ἄξομεν τὸ κωνικὸν τμῆμα τῷ πυραμικῷ ἰσότιμον, ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ τῶν βάσεων τοῦ πυραμικοῦ, τὰς βάσεις τοῦ κωνικοῦ ἀντικαταστήσαντες, ἤτοι τὰς $\pi\Sigma^2$, $\pi\delta^2$, καὶ τὴν μέσην αὐτῶν ἀνάλογον $\sqrt{\pi^2\Sigma^2\delta^2} = \pi\Sigma\delta$, εὑρήσομεν τὸ χωρίον παντὸς κωνικοῦ τμήματος, παραλλήλους τὰς βάσεις ἔχοντος, ἴσον τῷ $\frac{\pi\upsilon}{3}(\Sigma^2+\Sigma\delta+\delta^2)$.

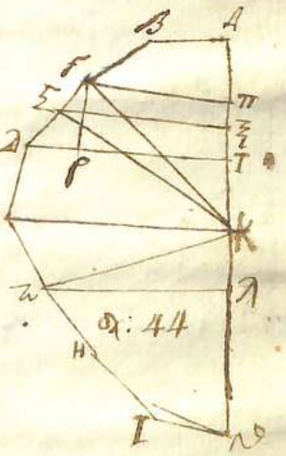
§417. Παντὸς κώνου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθείσῃ. καθότι ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια ἴση εὑρίσκεται τριγώνῳ βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν ἔχοντι, ὕψος δὲ τὴν τοῦ κώνου πλευράν.

§418. Παντὸς κωνικοῦ τμήματος παραλλήλους τὰς βάσεις ἔχον

λος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει γινομένῳ
τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ κ·φ: τῶν περιφερειῶν τῶν βά-
σεων ... καθότι ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια ἴση ...
ριστικὸν ..., ἥτις ἂν παραλληλόγραμμον, ἂν περι-
φέρειαι τοῦ βάσεων ..., ὁ δὲ ὕψος ἡ τῆς κωνικῆς ἐπι-
φανείας πλευρά. ὅθεν ὀνομασθήσονται Π ἑκατέρας περιφερείας
π δὲ τῆς ἑτέρας, καὶ Π' τῆς πλευρᾶς, ἔσεται ἡ ζη-
τουμένη ἐπιφάνεια $\frac{\Pi+\pi}{2}\Pi'$, ἐὰν δὲ ὀνομασθῇ Π'' ἡ πε-
ριφέρεια τῆς ἐν τῷ μέσῳ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας παραλλή-
λου ταῖς βάσεσι γινομένης τομῆς, ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια
ἔσεται $\Pi''\cdot\Pi'$.



§419 Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι τῆς ΑΒ (σχ. 43) περὶ τὴν ΓΕ περιστρα-
φείσης, ἡ ὑπ' αὐτῆς γραφεῖσα ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ
$AB\frac{(\text{περιφ}:BE+\text{περιφ}:A\Gamma)}{2}$, ἤτοι τῷ ΑΒ·περιφ: ΖΗ, τῆς ΖΗ ἐπίσης
ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΑΓ ἀπεχούσης· καθότι ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια ἴσ-
ται τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ διὰ τῆς τοιαύτης περιστροφῆς ἀποτε-
λεσθέντος κωνικοῦ τμήματος.



§420: Τοῦ ΑΒΓΔ (σχ: 44) κανονικοῦ ὑποτεθέντος πολυγώνου
καὶ ΚΣ ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐν αὐτῷ γραφέντος κύκλου, ἐὰν τὸ
μέρος ΓΔΕΖ περὶ τὴν ΑΘ περιστραφῇ, ἡ ὑπ' αὐτοῦ γραφεῖσα
κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση ἔσται τῷ γινομένῳ ΠΛ·περιφ:ΚΣ· ἡ γὰρ
ὑπὸ τῆς ΓΔ γραφεῖσα ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΓΔ·περιφ:ΞΣ, ἀλλὰ
διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΔρ, ΚΞΣ τὰς ἰδίας πλευρὰς
καθέτους ἀλλήλαις ἐχόντων, λαμβάνομεν ΓΔ:Γρ = ΠΤ::ΚΣ:
ΞΣ:: περιφ:ΚΣ:περιφ:ΞΣ, ὥστε ἔχομεν ΓΔ·περιφ:ΞΣ = ΠΤ·
περιφ:ΚΣ, ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς ΔΕ γρα-
φεῖσα ἐπιφάνεια ἴση ἔσται ΚΤ·περιφ:ΚΣ, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΖ=
ΚΛ·περιφ:ΚΣ· ὅθεν ἡ ὑπὸ τῆς ὅλης ΓΔΕΖ ἴση ἔσεται τῷ
γινομένῳ ΛΠ·περιφ:ΚΣ.

§421: Ἐὰν δὲ τὸ πολύγωνον ἀρτιόπλευρον ὑποτεθῇ, ὁ δὲ ἄ-
ξων ΑΘ διὰ τοῦ ἀντικειμένου διέρχηται γωνιῶν Α, Θ, ἡ
διὰ τοῦ ἡμιπολυγώνου γραφεῖσα κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση: ἄξων τῷ ἄξονι

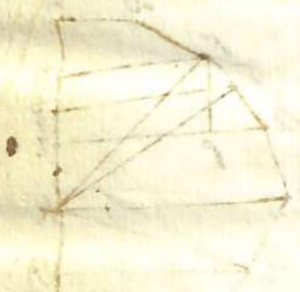
ἂν θέσει τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν αὐτῷ γραφομένου κύκλου πολλαπλα-
σιασθέντι,

§422: Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἐπὶ
τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντι· νοείσθω περὶ τὸ πε-
ριγραφόμενον ἡμικύκλιον κανονικὸν γράψαντες ἡμιπολύγωνον τετράπλευρον;
περὶ δὲ αὐτὸ ἄλλο ἡμικύκλιον μεθ' οὗ τῆς συμπτώσεως αὐτοῦ συ-
νάπτον, ἕξομεν τὴν ὑπὸ τοῦ ἡμιπολυγώνου γραφομένην ἐπιφάνειαν
μείζονα μὲν τῆς ὑπὸ τοῦ ἐντὸς ἡμικυκλίου γραφομένης σφαιρι-
κῆς ἐπιφανείας, ἐλάττονα τῆς ὑπὸ τοῦ ἐκτός, εἶτα ὀνομάσαντες
δ τὴν διάμετρον τοῦ ἐντὸς ἡμικυκλίου, Δ δέ, τὴν τοῦ ἐκτός·
ἐὰν ὑποθῶμεν δ. περιφ: δ μέτρον μείζονος σφαιρικῆς ἐπιφανεί-
ας τῆς ἐχούσης φερ' ἔσω, Δ διάμετρον, ἕξομεν καὶ τὴν ὑπὸ τοῦ
ἡμιπολυγώνου γραφομένην ἐπιφάνειαν μείζονα τῆς αὐτῆς σφαι-
ρικῆς ἐπιφανείας, ὅπερ ἀδύνατον. ἐὰν δὲ ὑποθῶμεν Δ.
περιφ. Δ μέτρον ἐλάσσονος σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἐχούσης τὴν
Δ διάμετρον, εὑρήσομεν καὶ τὴν ὑπὸ τοῦ ἡμιπολυγώνου γραφομένην
ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὅπερ
ἄτοπον. ὅθεν πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὸ τῆς
διαμέτρου ἐπὶ τῆς περιφερ. μεγίστου κύκλου γινόμενον.

§423: Ἐπεὶ δὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς μεγίστου κύκλου ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτοῦ περι-
φερείᾳ ἐπὶ τὴν ἡμισείαν ἡμιδιαμέτρου ἤτοι ἐπὶ τὸ τέταρτον τῆς διαμέ-
τρου πολλαπλασιασθέντι, τοῦτ' ἔστι καὶ παντὸς μεγίστου κύκλου ἴσος
ἐστὶ τῷ $\frac{\Delta \cdot \text{περιφ.} \Delta}{4}$, ἡ δὲ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση τῷ Δ. περιφ. Δ
δῆλον, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου
κύκλου.

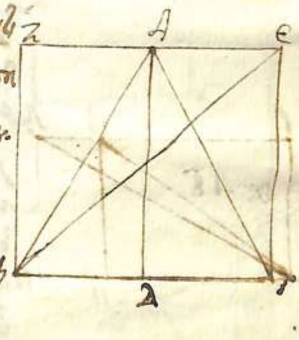
§424: Ἔστι δὴ καὶ πᾶν τρίγωνον ἔχει πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφά-
νειαν, ὡς ἡ αὐτοῦ γωνία πρὸς 4 ὀρθάς, ἤτοι τὸ πολλαπλασιον αὐτοῦ
λόγον πρὸς τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, ἄρα, ὅτι καὶ
πᾶν τρίγωνον ἴσος ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ τὸ πολλαπλασίον τῆς τὴν
αὐτοῦ γωνίαν λόγου πολλαπλασιασθέντι.

§425: Ἔστω δή καὶ πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐστιν ἀμβλεί-
ας γωνίας ἔχοντι τὸ ἥμισυ τῆς πολλαπλασίασει αὐτοῦ γωνίας (398)
ὀνομάσαντες κ, λ, μ τὰ πολλαπλασίοντα τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου
τοῦ, ΣΤ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, Δ τὴν διάμετρον αὐτοῦ,



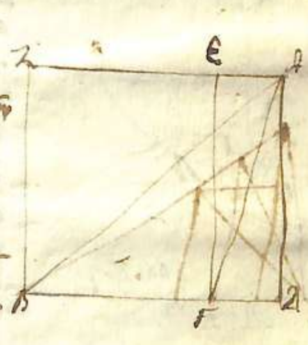
ἄξονι $\frac{\kappa+\lambda+\mu-\frac{1}{2}\pi}{2}$ τὸ μόριον τὸ τῶν γωνιῶν πλεονασμῷ τὸ ἥμισυ
ἥμισυ τῷ τριγώνου ἀναλογοῦν, ὥστε $\Delta\frac{\kappa+\lambda+\mu-\frac{1}{2}\pi}{2}$, ἔσεται ἡ τοῦ σφαιρικοῦ
ἐπιφάνεια, ὡς ἐπομένως τοῦ δοθέντος τριγώνου, ὅταν τρίγωνον τρισορθογώνιον
ὑποτεθέντος, ὅτε ἑκάστη ὅλη ἴση τῷ $\frac{\pi}{4}$ ληφθέντος, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ
ἔσεται $\frac{\Delta\pi(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{8}\Delta\cdot\pi$, ὅτε τῷ ὀγδόῳ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας

§426 ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαιρικῆς ζώνης ἴση ἐστὶ τῷ ὕψει, ὅτε τῷ αὐτοῦ ἄξονι ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντι. καθότι ἐπειδὴ καὶ ὅλη ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἴση τῇ αὐτῆς ἐστι διαμέτρῳ ὅτε τῷ ἄξονι ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντι, δῆλον ὅτι, καὶ ἑκάστου αὐτῆς μέρος ὅτε ἑκάστη σφαιρικὴ ζώνη ἴση ἐπὶ τῷ ἀναλογοῦντι τοῦ ἄξονος μέρει ὅτε τῷ αὐτῆς ὕψει ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντι.



§427. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ σφαιρικαὶ ζῶναι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, ἑκάστη δὲ ζώνη πρὸς ὅλην τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὡς τὸ αὐτῆς ὕψος πρὸς ὅλην τὴν διάμετρον.

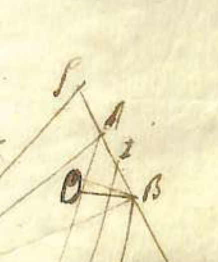
σχ: 45

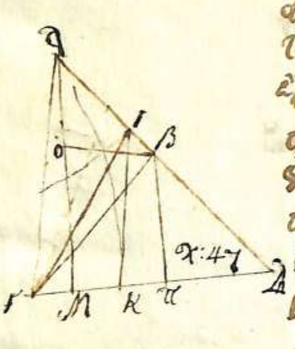


§428 Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 45) καὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΕ περὶ τὴν βάσιν ΒΓ περιστραφέντων, τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου γραφόμενον χωρίον, τὸ τρίτον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραγομένου κυλίνδρου. καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΓΕ, δῆλον ὅτι καὶ τὰ διὰ τῆς περιστροφῆς αὐτῶν χωρία ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται, ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΕΓ παραγόμενος κῶνος τὸ τρίτον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΕ κυλίνδρου, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ χωρίον τὸ τρίτον ἔσεται τοῦ διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ ΒΕ κυλίνδρου, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ χωρίον $\pi\overline{A\Delta}^2\cdot B\Gamma$, δῆλον ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου χωρίον ἔσεται $\frac{\pi}{3}\overline{A\Delta}^2\cdot B\Gamma$.

§429. Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 46) τρόπῳ τινὶ περὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ τὴν ἀπὸ τῆς γωνίας Γ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀχθεῖσαν, περιστραφέντος, τὸ διὰ τῆς τοιαύτης αὐτοῦ περιστροφῆς γραφὲν χωρίον. Τῆς ΑΒ μέχρι τοῦ Δ ἐκβληθείσης, καὶ τῶν καθέτων ΑΜ, ΒΠ ἀχθεισῶν, τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ χωρίον ἔσεται $\frac{\pi}{3}\overline{AM}^2\cdot\Gamma\Delta$, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ΒΓΔ ἔσεται $\frac{\pi}{3}\overline{B\Pi}^2\cdot\Gamma\Delta$, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ ἀφαιρεθέντος $\frac{\pi}{3}(\overline{AM}^2-\overline{B\Pi}^2)\Gamma\Delta$, ἀλλὰ τῆς καθέτου ΙΚ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀχθείσης γίνεται $AM+B\Pi = 2IK$, καὶ $AM-B\Pi = AO$, ἐπεὶ δὲ $(AM+B\Pi)(AM-B\Pi) = \overline{AM}^2-\overline{B\Pi}^2 = 2IK\cdot AO$, ὥστε τὸ ζητηθὲν χωρίον ἔσεται, $\frac{2}{3}\pi\cdot IK\cdot AO\cdot\Gamma\Delta$, ἀχθείσης δὲ τῆς ΓΡ καθέτου τῇ ΑΡ, διὰ τὴν ὁμοιότητα

σχ: 46

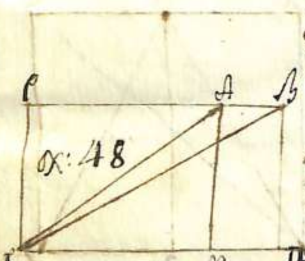




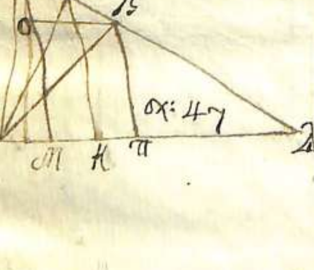
τοῦ τριγώνου ΔΓΡ, ΑΒΘ χαρακτῆρες ΑΘ:ΓΡ::ΑΒ:ΓΔ, ἤτοι ΑΘ·ΓΔ = ΓΡ·ΑΒ, ἀλλὰ δὲ ΓΡ·ΑΒ = 2ΑΒΓ, ὥστε τὸ ζητούμενον χωρίον περιαχθήσεται $\frac{4}{3}\varpi\cdot ΑΒΓ\cdot ΙΚ$. ἀλλὰ $2\varpi\cdot ΙΚ$ = περιφ: ΙΚ, ὥστε ἕξομεν $\frac{4}{3}\varpi\cdot ΑΒΓ\cdot ΙΚ = \frac{2}{3}\cdot ΑΒΓ\cdot$ περιφ: ΙΚ, τουτ: τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ περιαγόμενον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὅλῳ τριγώνῳ ἐπὶ τὴν $\frac{2}{3}$ τῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως σημείου γραφθείσης περιφ: περισπασθείσης.

§430: Ἔτι δὲ ΑΓ = ΒΓ ληφθήσονται (σχ:47), καὶ τῆς ΓΙ καθέτου ἐπὶ ΑΒ ἀχθείσης, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον $\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΓΙ$ ἔσεται, τὸ δὲ ἀπὸ τούτου τοῦ τριγώνου χωρίον περιαχθήσεται, $\frac{4}{3}\varpi\cdot ΑΒΓ\cdot ΙΚ = \frac{2}{3}\varpi\, ΑΒ\cdot ΓΙ\cdot ΙΚ$. ἀλλὰ ΑΒ:ΒΘ = ΜΠ::ΓΙ:ΙΚ, καὶ ΑΒ·ΙΚ = ΜΠ·ΓΙ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ χωρίον ἴσον ἔσται τῷ $\frac{2}{3}\varpi\cdot \overline{ΓΙ}^2\cdot ΜΠ$.

§431: Ἔτι δὲ ΑΒ παράλληλος τῷ ἄξονι ὑποτεθήσονται (σχ:48), τὸ αὐτὸ ἐξάγεται ἀξιούμενον· καθότι ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΒΜ κύλινδρος μέτρον ἔχει τὸ γινόμενον $\varpi\,\overline{ΑΜ}^2\cdot ΜΠ$, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΓΜ κῶνος τὸ $\frac{\varpi}{3}\,\overline{ΑΜ}^2\cdot ΓΜ$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΓΠ τὸ $\frac{\varpi}{3}\,\overline{ΑΜ}^2\cdot ΓΠ$, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ χωρίον ἔσεται $\varpi\cdot\overline{ΑΜ}^2(ΜΠ + \frac{1}{3}ΓΜ - \frac{1}{3}ΓΠ)$, ἐπειδὴ δὲ καὶ ΓΠ − ΓΜ = ΜΠ, καὶ ἄρα ΓΜ − ΓΠ = −ΜΠ, καὶ $\frac{1}{3}ΓΜ - \frac{1}{3}ΓΠ = -\frac{1}{3}ΜΠ$, τὸ δηλαδὴ ἴσον τοῦ ἀπὸ τοῦ προτέρου ἀντικαταχθέντος, τὸ ζητούμενον χωρίον περιαχθήσεται $\varpi\cdot\overline{ΑΜ}^2\cdot\frac{2}{3}ΜΠ = \frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΑΜ}^2\cdot ΜΠ$



§432: Ἐάν, τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ (σχ:44) ὁ τομεὺς ΓΛΕΖΚ περὶ τὸν ἄξονα ΑΛ περιγραφῇ, τὸ ἀπ' αὐτοῦ χωρίον ἴσον ἔσεται τῷ γινομένῳ $\frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΠΛ$, καθότι, ἐπειδὴ καὶ πάντα τὰ τρίγωνα ΓΛΚ, ΛΕΚ, ... ἰσοσκελῆ εἰσι, δῆλον ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ ΓΛΚ χωρίον ἴσον ἔσεται τῷ $\frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΠΤ$, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ΛΕΚ τῷ $\frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΤΚ$, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΕΖΚ τῷ $\frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΚΛ$, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπὸ τοῦ ὅλου τομέως περιαγόμενον ἴσον τῷ $\frac{2}{3}\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΠΛ$ περιαχθήσεται.

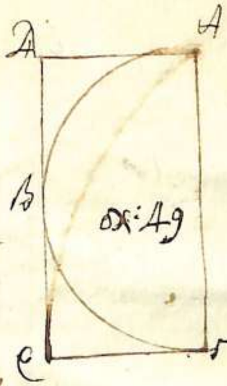


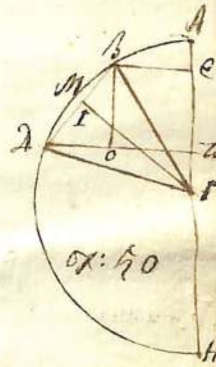
§433: Πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς μέτρον ἔχει τὴν ζώνην αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθεῖσαν, ὅτι, γὰρ ἤδη, ὀνομασθέντος ΠΤ τοῦ ὕψους τῆς ζώνης, ΚΣ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἔσεται περιφ: ΚΣ·ΠΤ = $2\varpi\,ΚΣ\cdot ΠΤ$, τὸ δὲ χωρίον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως περιαχθήσεται περιφ: $ΚΣ\cdot ΠΤ\cdot\frac{ΚΣ}{3} = \frac{2\varpi\cdot\overline{ΚΣ}^2\cdot ΠΤ}{3}$. καθότι ὑποθέντες τὸ γινόμενον τοῦτο μέτρον ἄλλου τινὸς τομέως διαφόρου ... ἔχοντος ἡμιδιάμετρον καὶ ὕψος, ἀρμόσομεν τομέα κανονικοῦ περιγραφέντος πολυγώνου μείζονα τοῦ ἰδίου ὅλου, ἢ ἐλάσσονα τοῦ ἰδίου μέρους, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ὀνομασθήσῃ Η τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ ν τὸ ὕψος τῆς ἀνήκουσης τῷ τομεῖ ζώνης, τὸ χωρίον αὐτοῦ ἔσεται $\frac{2\varpi\overline{Η}^2 ν}{3}$.

§434: Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ τὸ χωρίον πάσης σφαίρας ἴσον ἔσεται τῇ αὐτῆς ἐπιφανείᾳ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσῃ, ὥστε τῆς ἡμιδιαμέτρου Η ὑποτεθείσης, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔσεται $4\varpi\,\overline{Η}^2$, τὸ δὲ χωρίον $\frac{4\varpi\overline{Η}^3}{3}$, καὶ ἐπειδὴ Η = $\frac{Δ}{2}$

$H^3 = \frac{\Delta^3}{8}$, τὸ ζητούμενον στερεὸν εὑρεθήσεται $\frac{4\pi H^3}{3} = \frac{\pi \Delta^3}{6}$, ὅθεν αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας εἶναι, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων, ἢ διαμέτρων αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ αὐτῶν τετράγωνα.

§435 Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 2:3, τὸν αὐτὸν δὲ καὶ τὰ στερεὰ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὡς ἡ ἐπιφάνεια οὕτω καὶ τὸ στερεὸν τοῦ κυλίνδρου ἡμιόλιά ἐστι τῆς ἐπιφανείας, καὶ τοῦ στερεοῦ τῆς ἐν αὐτῷ γραφομένης σφαίρας· καθότι ὑποτεθέντος ΑΒΓ (σχ:49) τοῦ περὶ τὴν ΑΓ περιγραφομένου ἡμικυκλίου, καὶ τὴν σφαῖραν περιγράφοντος, καὶ ΑΕ τοῦ περιφερομένου ἡμιτετραγώνου, καὶ τὸν περιγραφόμενον κύλινδρον ἐκτελοῦντος, ἡ κυρτὴ τούτου ἐπιφάνεια εὑρεθήσεται περιφ: ΕΓ·ΑΓ, ἤτοι τέσσαρσι μεγίστοις τῆς σφαίρας κύκλοις, ἴση δηλ: τῇ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ, ἐὰν δὲ τούτοις καὶ τὰς δύο προσθῶμεν βάσεις, ὅλη τούτου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἓξ μεγίστοις ἔσεται κύκλοις· ὅθεν ἡ τῆς σφαίρας ἴση τέσσαρσι μόνοις, οὖσα, ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ὡς 4:6::2:3, ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ κύλινδρος ἴσος ἐπὶ τῷ μεγίστῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ, ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτῆς πολλαπλασιασθέντι, ἡ δὲ σφαῖρα ἴση τέσσαρσι μεγίστοις κύκλοις ἐπὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθεῖσιν, ἤτοι ἑνὶ μεγίστῳ κύκλῳ ἐπὶ $\frac{4}{3}$ τῆς ἡμιδιαμέτρου, ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθέντι, ἔσεται ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν κύλινδρον ὡς $\frac{2}{3} : 1$ ἤτοι ὡς 2:3.





§436: Τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ (σχ:50) περὶ τὴν ΑΗ περιγραφέντος, τὸ ἰσότιμον τοῦ ἐξ αὐτοῦ [illegible] στερεοῦ.

Ἀχθεισῶν τῶν καθέτων ΒΕ, ΔΖ, ΓΙ, καὶ τῶν ΒΓ, ΔΓ ἡμιδιαμέτρων, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΒΓ στερεὸν ἔσεται $\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot A\Gamma^2\cdot AE$, (433), τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ΑΓΔ, $\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot A\Gamma^2\cdot AZ$, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ ΒΓΔ εὑρεθήσεται $\frac{2}{3}\pi\cdot A\Gamma^2(AZ-AE)=\frac{2}{3}\pi\cdot A\Gamma^2\cdot EZ$. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΔ εὑρίσκεται $\frac{2}{3}\pi\cdot \Gamma I^2\cdot EZ$, (430), ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εὑρεθήσεται $\frac{2}{3}\pi\cdot EZ\,(A\Gamma^2-\Gamma I^2)$, ἀλλὰ διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΙ ἔχομεν $B\Gamma^2-\Gamma I^2 = A\Gamma^2-\Gamma I^2 = BI^2 = \frac{B\Delta^2}{4}$, ὥστε τὸ ζητούμενον στερεὸν ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi\cdot EZ\cdot\frac{B\Delta^2}{4}=\frac{\pi}{6}\cdot B\Delta^2\cdot EZ$.

§437: ὥστε ὀνομασθείσης c τῆς χορδῆς τοῦ περιφερομένου κυκλικοῦ τμήματος, υ τοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος λαμβανομένου ὕψους αὐτοῦ, τὸ στερεὸν ἔσεται $\frac{\pi}{6}\cdot c^2 \upsilon$.

§438: Ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τμῆμα, τὰς βάσεις αὐτοῦ παραλλήλους ἔχον, μέτρον ἔχει τὸ ἡμικεφάλαιον τῶν ἰδίων βάσεων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πολλαπλασιασθέν, καὶ τὴν σφαῖραν διάμετρον τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχουσαν.

Ὑποτεθησῶν ΒΕ, ΔΖ (σχ: 50) τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν βάσεων, τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος περιγραφόμενον στερεὸν ἔσεται $\frac{\varpi}{6}\cdot\overline{ΒΔ}^2\cdot ΕΖ$, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ τραπεζίου ΔΕ ἕξει μέτρον τὸ γινόμενον $\frac{\varpi}{3}\cdot ΕΖ(\overline{ΒΕ}^2+ΒΕ\cdot ΔΖ+\overline{ΔΖ}^2)$, (416), ὥστε τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἴσον εὑρεθήσεται τῷ
$\frac{\varpi}{6}\cdot\overline{ΒΔ}^2\cdot ΕΖ+\frac{\varpi}{3}\cdot ΕΖ(\overline{ΒΕ}^2+ΒΕ\cdot ΔΖ+\overline{ΔΖ}^2)=\frac{\varpi}{6}\cdot ΕΖ(2\overline{ΔΖ}^2+2ΒΕ\cdot ΔΖ+2\overline{ΒΕ}^2+\overline{ΒΔ}^2)$
ἀλλὰ τῆς ΒΘ παραλλήλου τῇ ΕΖ ἀχθείσης, ἔσεται ΔΘ = ΔΖ − ΒΕ, καὶ $\overline{ΔΘ}^2=\overline{ΔΖ}^2-2ΔΖ\cdot ΒΕ+\overline{ΒΕ}^2$, καὶ ἑπομένως $\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΒΘ}^2+\overline{ΔΘ}^2=\overline{ΕΖ}^2+\overline{ΔΖ}^2-2ΔΖ\cdot ΒΕ+\overline{ΒΕ}^2$, ὥστε τοῦ ἀπαγομένου τοῦ κατὰ τὸ εὑρεθὲν ἰσότιμον ἀντικατατεθέντος γενήσεται,
$\frac{\varpi}{6}\cdot ΕΖ(3\overline{ΒΕ}^2+3\overline{ΔΖ}^2+\overline{ΕΖ}^2)=ΕΖ\left(\frac{\varpi\overline{ΒΕ}^2+\varpi\overline{ΔΖ}^2}{2}\right)+\frac{\varpi}{6}\cdot\overline{ΕΖ}^3$,
τουτ: τὸ ζητούμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμικεφαλαίῳ τῶν βάσεων αὐτοῦ, ἐπὶ τοῦ ἰδίου ὕψους πολλαπλασιασθέντι, καὶ σφαίρᾳ διάμετρον τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχούσῃ.

§439: Ὅθεν ὀνομασθησῶν β, ϐ τῶν βάσεων, υ δὲ τοῦ ὕψους, τὸ στερεὸν ἔσεται $\left(\frac{β+ϐ}{2}\right)υ+\frac{\varpi υ^3}{6}$.

§440: Ἐκ τούτων δῆλον γίνεται, ὅτι τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μίαν βάσιν τὴν β, φέρ' εἰπεῖν, ἔχοντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ ἔσεται $\frac{βυ}{2}+\frac{\varpi υ^3}{6}$. ἴσον δηλ: τῷ ἡμίσει τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἔχοντος, καὶ σφαίρᾳ διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ ἐχούσῃ τμήματος.

Τέλος

+ $\frac{20}{23}$.